MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT

UNTER STÄNDIGER MITWIRKUNG

VON

K. KNOPP
KÖNIGSBERG

E. SCHMIDT
BERLIN

I. SCHUR
BERLIN

HERAUSGEGEBEN

VON

L. LICHTENSTEIN
BERLIN

WISSENSCHAFTLICHER BEIRAT:

W. BLASCHKE L. FEJÉR E. HECKE G. HERGLOTZ A. KNESER
E. LANDAU O. PERRON F. SCHUR E. STUDY H. WEYL

6. BAND

BERLIN
VERLAG VON JULIUS SPRINGER
1920

5856-42

MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT

UNTER STÄNDIGER MITWIRKUNG

VON

K. KNOPP
KÖNIGSBERG

E. SCHMIDT
BERLIN

I. SCHUR
BERLIN

HERAUSGEGEBEN

VON

L. LICHTENSTEIN
BERLIN

WISSENSCHAFTLICHER BEIRAT:

W. BLASCHKE L. FEJÉR E. HECKE G. HERGLOTZ A. KNESER
E. LANDAU O. PERRON F. SCHUR E. STUDY H. WEYL

6. BAND

BERLIN
VERLAG VON JULIUS SPRINGER
1920

66 F3180

QA1
M88
v.6-8

Inhaltsverzeichnis

Seite

Blaschke, W., Über affine Geometrie XXVI: Wackelige Achtflache 85
Blaschke, W., Frenets Formeln für den Raum von Riemann 94
Blaschke, W., Geometrische Untersuchungen zur Variationsrechnung. I. Über Symmetralen 281
Cramér, H., Bemerkung zu der vorstehenden Arbeit des Herrn E. Landau . . 155
Grammel, R., Die Stabilität der Staudeschen Kreiselbewegungen 124
Hamburger, H., Über eine Riemannsche Formel aus der Theorie der Dirichletschen Reihen 1
Happel, H., Über das Gleichgewicht von elastischen Platten unter einer Einzellast 203
Hardy, G. H., Note on a Theorem of Hilbert 314
Haupt, O., Ein Satz über die Abelschen Integrale 1. Gattung 219
Hecke, E., Eine neue Art von Zetafunktionen und ihre Beziehungen zur Verteilung der Primzahlen. (Zweite Mitteilung.) 11
Jacobsthal, E., Mittelwertbildung und Reihentransformation 100
Knopp, K., Mittelwertbildung und Reihentransformation 118
Koebe, P. Über das Schwarzsche Lemma und einige damit zusammenhängende Ungleichheitsbeziehungen der Potentialtheorie und Funktionentheorie . . 52
Koebe, P., Zum Verzerrungssatze der konformen Abbildung 311
Lagally, M., Über die Zerlegbarkeit von flächentreu aufeinander abgebildeten Gebieten in unendlich kleine, paarweise kongruente Teile 143
Landau, E., Über die Nullstellen der Zetafunktion 151
Mathematisch-physische Preisaufgaben der Fürstlich Jablonowskischen Gesellschaft 319
Neder, L., Konvergenzdefekte der Potenzreihen stetiger Funktionen auf dem Rande des Konvergenzkreises 262
Neder, L., Über die Fourierkoeffizienten der Funktionen von beschränkter Schwankung 270
Neumann, E. R., Der Poincarésche Satz über Differenzengleichungen in seiner Anwendung auf eine Integralgleichung 238
Perron, O., Zur Theorie der divergenten Reihen 158
Perron, O., Über nichthomogene lineare Differentialgleichungen 161
Perron, O., Beitrag zur Theorie der divergenten Reihen 286
Perron, O., Bemerkung zu der Arbeit „Über eine spezielle Klasse von Regelflächen“ 318
Schmeidler, W., Bemerkungen zur Theorie der abzählbaren Abelschen Gruppen 274
Szegő, G., Beiträge zur Theorie der Toeplitzschen Formen. (Erste Mitteilung) . 167

Über eine Riemannsche Formel aus der Theorie der Dirichletschen Reihen.

Von

Hans Hamburger in Berlin.

Man verdankt Riemann[1]) eine Formel, die die Koeffizientensummen Dirichletscher Reihen durch bestimmte Integrale darstellt. In den folgenden Ausführungen soll ein neuer Beweis der Riemannschen Formel angegeben werden, der einfacher als die bisher bekannten Beweise erscheint, und gleichzeitig die Gültigkeitsbedingungen der Riemannschen Formel wesentlich verallgemeinert, indem diese auf eine Klasse von Funktionen angewendet wird, die die Dirichletschen Reihen nur als speziellen Fall enthält.

§ 1.

1. Es sei $0 \leqq \lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots \to \infty$ eine unendliche Folge positiver monoton wachsender Zahlen, $a_0, a_1, a_2, \ldots$ eine Folge beliebiger reeller oder komplexer Koeffizienten. $s = \sigma + it$ bezeichne die komplexe Veränderliche.

Dann nennt man

$$f(s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s} \tag{1}$$

eine Dirichletsche Reihe.

Setzt man voraus, daß die Reihe (1) für einen beliebigen Punkt $s_0 = \sigma_0 + it_0$ konvergiert, so besitzt sie bekanntlich eine Konvergenzhalbebene $\sigma > \alpha$; d. h. die Reihe konvergiert für jeden Punkt mit reellem Teil $> \alpha$ und divergiert für jeden Punkt mit reellem Teil $< \alpha$. Hierbei kann auch der Fall eintreten, daß $\alpha = -\infty$ wird; es ist aber jedenfalls

[1]) B. Riemann, Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Größe, Ges. Werke, herausgegeben von H. Weber, II. Aufl., Leipzig 1892, S. 145—153. Vgl. insbesondere S. 148—150.

immer $\alpha \leqq \sigma_0$ [2]). Über Konvergenz oder Divergenz der Reihe auf d Geraden $\sigma = \alpha$ läßt sich im allgemeinen Falle nichts aussagen. Im fo genden soll zunächst immer $\alpha \geqq 0$ vorausgesetzt werden. Doch werd wir uns von dieser Einschränkung am Ende des § 2 befreien.

In jedem endlichen abgeschlossenen Bereiche der Konvergenzhall ebene, welcher keinen Punkt der Geraden $\sigma = \alpha$ enthält, konvergiert d Dirichletsche Reihe gleichmäßig in bezug auf s und stellt dort folgli nach einem bekannten Satze von Weierstraß eine analytische Funktic $f(s)$ dar.

Im allgemeinen Falle besitzt die Dirichletsche Reihe auß der Halbebene bedingter Konvergenz noch eine solche absoluter Ko vergenz $\sigma > \beta$. Es ist offenbar immer $\beta \geqq \alpha$, und zwar sind auch d Grenzfälle möglich, nämlich der Fall $\alpha = \beta$, d. h. daß die Dirichletsc Reihe entweder absolut konvergiert oder überhaupt nicht, und der Fa $\beta = +\infty$, wo die Dirichletsche Reihe in keinem Punkte absolut ko vergiert, obwohl sie eine Halbebene bedingter Konvergenz hat.

2. Um zur Riemannschen Formel zu kommen, führen wir ei unstetige, aus den Koeffizientensummen der Dirichletschen Reihe g bildete, treppenförmige Funktion $A(x)$ ein, die wir, wenn A_m die Summ der $m+1$ ersten Koeffizienten

$$A_m = \sum_{n=0}^{m} a_n \tag{2}$$

bedeutet, in folgender Weise definieren:

Es sei

$$\begin{aligned} A(x) &= 0 \quad \text{für} \quad 0 \leqq x < \lambda_0, \quad \text{wenn} \quad \lambda_0 > 0 \\ A(x) &= A_m \quad \text{für} \quad \lambda_m < x < \lambda_{m+1}. \end{aligned} \tag{3}$$

An den Stellen λ_m erleidet also die Funktion einen Sprung; sie möge d den Wert annehmen, der in der Mitte des Sprunges gelegen ist, d. h.

$$A(\lambda_0) = \frac{a_0}{2}, \qquad A(\lambda_m) = \frac{A_{m-1} + A_m}{2} = A_{m-1} + \frac{a_m}{2}. \tag{4}$$

Dann lautet die Riemannsche Formel:

$$A(x) = \lim_{\omega = \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\omega}^{\sigma + i\omega} \frac{f(s)}{s} e^{xs}\, ds. \tag{5}$$

---

[2]) Vgl. z. B. bezüglich dieser und der folgenden Sätze über Dirichletsche Reih E. Landau, Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen, Leipzig 19 zwei Bände, — im folgenden kurz mit Landau, Handbuch, zitiert. Die allgemein Sätze über die Konvergenz Dirichletscher Reihen findet man im Bd. II, S. 726

Riemann beweist diese Formel für das pezielle Beispiel der Funktion

$$f(s) = \log \zeta(s) = \sum_p p^{-s} + \frac{1}{2} \sum_p p^{-2s} + \ldots,$$

wo die Summen rechter Hand über sämtliche Primzahlen zu erstrecken sind. Diese Reihe ist in der Halbebene $\sigma > 1$ absolut konvergent; die Formel (5) konvergiert hier gleichfalls für $\sigma > 1$.

Der Riemannsche Beweis beruht darauf, daß das Integral (5) auf ein Fouriersches Doppelintegral zurückgefü rt wird. Die genauen Bedingungen, unter denen (5) konvergiert, hat Riemann nicht näher geprüft; waren doch, wie Herr Landau in seinem Buche erwähnt[3]), damals hinreichende Bedingungen, unter denen das Fouriersche Integraltheorem gilt, noch nicht bekannt. Bedingungen, die den Riemannschen Fall umfassen, wurden erst später durch Herrn Jordan im Jahre 1883 in seinem Cours d'analyse[4]) aufgestellt. Immerhin ist unter Zuhilfenahme dieser Jordanschen Ergänzung, wie Herr Landau bemerkt, der Riemannsche Beweis für den Fall einer absolut konvergenten Dirichletschen Reihe, den Riemann im Auge hat, vollkommen schlüssig.

Die Riemannsche Formel (5) ist noch mehrfach auf anderen Wegen bewiesen worden, zunächst für denselben Bereich wie von Riemann, d. h. für $\sigma > \beta$ von Herrn Phragmén[5]), dann von Herrn Hadamard unter etwas erweiterten Voraussetzungen[6]).

Etwa gleichzeitig erschien eine Arbeit von Herrn Perron[7]). In ihr wird die Konvergenz des Integrals (5) für allgemeine Dirichletsche Reihen, wofern diese nur eine Halbebene bedingter Konvergenz $\sigma > \alpha$ besitzen, für $\sigma > \alpha$ bewiesen. Dies ist das allgemeinste unter den bisher bekannten Resultaten.

Der Perronsche Beweis, der, wie auch die Beweise der Herren Phragmén und Hadamard, im Gegensatze zu dem Riemannschen Gedankengang sich auf den Cauchyschen Integralsatz stützt, ist aber noch etwas kompliziert. Er benutzt wesentlich den schon an sich nicht einfach

---

[3]) Landau, Handbuch, Bd. II, S. 906.

[4]) C. Jordan, Cours d'analyse, Paris 1894, zweite Aufl., Bd. II, S. 233–235.

[5]) E. Phragmén, Über die Berechnung der einzelnen Glieder der Riemannschen Primzahlformel. Öfversigt af Knogl. Vetenskaps-Akad. Förhandlingar, Bd. 48 (1891 bis 1892), S. 721–744.

[6]) J. Hadamard, Sur les séries de Dirichlet, Rend. del circ. Mat. di Palermo, Bd. 25 (1908), S. 326–330.

[7]) O. Perron, Zur Theorie der Dirichletschen Reihen, Crelles Journal, Bd. 134 (1908), S. 95–143; vgl. insbesondere S. 114–125. Vgl. auch Landau, Handbuch, Bd. 41, S. 828–832.

zu beweisenden Hilfssatz[8]), daß der Quotient $\frac{f(s)}{s}$ sich mit wachsendem t für $\sigma \geqq \alpha + \varepsilon$ gleichmäßig in bezug auf σ der 0 nähert.

3. Um zu unserem allgemeineren Satz zu gelangen, nehmen wir zunächst mit Hilfe der in (2), (3) und (4) definierten Funktion $A(x)$ eine einfache Umformung der Dirichletschen Reihe vor, wir setzen nämlich:

$$(6) \qquad f(s) = s\int_0^\infty A(u)e^{-su}du$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} sA_n \int_{\lambda_n}^{\lambda_{n+1}} e^{-su}du = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(e^{-\lambda_n s} - e^{-\lambda_{n+1}s}),$$

und man sieht unschwer, daß die Summe rechter Hand aus der Dirichletschen Reihe durch sogenannte partielle (Abelsche) Summation hervorgegangen ist, die ja bei den Schlüssen in der Theorie der Dirichletschen Reihen überhaupt eine wichtige Rolle spielt.

Nun gilt aber nach einer bekannten, leicht zu beweisenden Formel aus der Theorie der Dirichletschen Reihe, wenn $\alpha \geqq 0$ ist, die Abschätzung[9])

$$|A(u)| \leqq Ce^{(\alpha+\varepsilon)u}$$

für jedes noch so kleine positive ε, wo C eine Konstante bedeutet, die nur von ε abhängt. Folglich ist die Integraldarstellung (6) für $f(s)$ wegen

$$\int_0^\infty |A(u)|\,|e^{-su}|\,du \leqq C\int_0^\infty e^{(\alpha+\varepsilon-\sigma)u}du$$

mindestens für $\sigma > \alpha + \varepsilon$ *absolut* konvergent. Bezeichnet man demnach mit γ die Abszisse absoluter Konvergenz des Integrals (6), so ist jedenfalls $\gamma \leqq \alpha$, wenn $\alpha \geqq 0$ ist.

Der Fall $\gamma < \alpha$ kann auch eintreten. Im § 3 wird ein Beispiel einer Funktion angegeben, deren Integraldarstellung (6) eine absolute Konvergenzhalbebene besitzt, während die zugehörige Dirichletsche Reihe nirgends konvergiert.

Wir behaupten nunmehr die Konvergenz des Integrals (5) für $\sigma > \gamma$, wobei die Größe γ selbst auch negativ sein darf.

4. Bisher wurde $A(u)$ als Treppenfunktion angenommen; jetzt soll diese Funktion durch eine beliebige reelle Funktion $V(u)$ ersetzt werden, von der nur vorausgesetzt wird, daß sie in jedem endlichen Intervall von beschränkter Schwankung ist[10]).

---

[8]) Perron l. c.[7]) Vgl. auch Landau, Handbuch, Bd. II, S. 822–823.

[9]) Vgl. Landau, Handbuch, Bd. II, S. 732–734.

[10]) Man überzeugt sich leicht, daß für den Fall der Dirichletschen Reihe die Treppenfunktion $A(u)$ in jedem endlichen Intervall von beschränkter Schwankung ist.

Ist $V(u)$ an der Stelle $u = x$ unstetig, so werde in leicht verständlicher Abkürzung

$$V(x) = \frac{V(x+0)+V(x-0)}{2} \tag{7}$$

gesetzt. Ist $\lim_{u=+0} V(u)$ von 0 verschieden, so sei unter $V(0)$ der Wert

$$V(0) = \lim_{u=+0} \frac{V(u)}{2} \tag{7'}$$

verstanden.

Wir betrachten nunmehr eine Funktion von der Form

$$f(s) = s\int_0^\infty V(u)e^{-su}du, \tag{8}$$

wo das Integral rechter Hand für $\sigma > \gamma$ absolut konvergieren möge.

Dann behaupten wir, es ist für $\sigma > \gamma$

$$V(x) = \lim_{\omega=\infty} \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-\omega i}^{\sigma+\omega i} \frac{f(s)}{s} e^{xs}ds. \tag{9}$$

Im § 2 wollen wir für die Riemannsche Formel in der allgemeineren Gestalt (9) einen Beweis angeben, der sich im wesentlichen dadurch einfacher als die Perronsche Schlußweise gestaltet, daß unser Gedankengang die Benutzung des obenerwähnten Perronschen Hilfssatzes vermeidet.

Als besonders bemerkenswert dürfen wir vielleicht hervorheben, daß unser Beweis gerade den ursprünglichen Riemannschen Gedankengang wieder benutzt.

Integrale von der Form (8) haben in der Mathematik eine wichtige Rolle gespielt. Bei der Fülle der Literatur beschränken wir uns darauf, auf eine Arbeit des Herrn Pincherle[11]) hinzuweisen, weil sich in dieser Arbeit ausführliche Bedingungen angegeben finden, unter denen bei allgemeinem $V(u)$ die Integraldarstellung (9) konvergiert. Herr Pincherle beweist nämlich folgenden Satz:

Ist $f(s)$ eine für $\sigma \geqq \xi$ analytische und mit Ausnahme des unendlich fernen Punktes reguläre Funktion, läßt sich ferner $f(s)$ auf die Form bringen

$$f(s) = C_0 + \frac{C_1(s)}{s^\vartheta},$$

wo ϑ eine beliebige Zahl > 0, C_0 eine Konstante und $C_1(s)$ eine für $\sigma \geqq \xi$ beschränkte Funktion bedeutet, so konvergiert das Integral (9) absolut und gleichmäßig in x für $\sigma \geqq \xi$ und stellt eine für $0 \leqq \xi < \infty$ stetige Funktion $V(x)$ dar; ferner läßt sich $f(s)$ für $\sigma > \xi$ durch das Integral (8) darstellen.

[11]) S. Pincherle, Sur les fonctions déterminantes, Annales de l'École Normale Bd. 22 (1905), S. 1–68 vgl. insbesondere S. 31–36.

Man sieht, daß der von Herrn Pincherle betrachtete Fall wesentlich enger als der von uns behandelte ist, da sich ja dort wegen der gleichmäßigen Konvergenz des Integrals (9) $V(x)$ als stetige Funktion von x ergibt, also der für uns wichtigste Fall der Dirichletschen Reihen — $A(x)$ war eine unstetige Funktion — ausgeschlossen ist.

§ 2.

5. Satz: *Es sei $V(u)$ eine im Intervall $0 \leqq u < \infty$ definierte reelle Funktion von u*[12]*, die in jedem endlichen Intervall von beschränkter Schwankung sein möge. An Unstetigkeitsstellen sei $V(u)$ durch die Mittelbildungen (7) und (7′) des § 1 definiert.*

Es sei ferner das Integral

$$f(s) = s\int_0^\infty V(u)e^{-su}du \tag{8}$$

für $\sigma > \gamma$ absolut konvergent, dann ist

$$V(x) = \lim_{\omega=\infty} \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\omega}^{\sigma+i\omega} \frac{f(s)}{s} e^{xs}ds \tag{9}$$

für $\sigma > \gamma$.

Beweis. Man setze

$$\frac{f(s)}{s} = \int_0^R V(u)e^{-su}du + \int_R^\infty V(u)e^{-su}du,$$

wobei R eine positive Zahl $> x+1$ bedeuten möge, und betrachte die beiden Integrale

$$I_1(\omega) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\omega}^{\sigma+i\omega} ds\int_0^R V(u)e^{s(x-u)}du, \tag{10}$$

$$I_2(\omega) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\omega}^{\sigma+i\omega} ds\int_R^\infty V(u)e^{s(x-u)}du; \tag{11}$$

dann läßt sich die behauptete Beziehung (9) in der Form schreiben

$$V(x) = \lim_{\omega=\infty}[I_1(\omega) + I_2(\omega)]. \tag{12}$$

Nun ist aber die in (12) enthaltene Behauptung bewiesen, wenn gezeigt wird, daß:

[12]) Ist $V(u)$ eine komplexe Funktion, etwa gleich $\Phi(u) + i\Psi(u)$, und sind $\Phi(u)$ und $\Psi(u)$ beide einzeln in jedem endlichen Intervall von beschränkter Schwankung, so läßt sich die Formel (9) beweisen, indem man die Funktionen

$$f_1(s) = s\int_0^\infty \Phi(u)e^{-su}du \text{ und } f_2(s) = s\int_0^\infty \Psi(u)e^{-su}du$$

beide gesondert betrachtet.

I. für jedes noch so große endliche $R > x + 1$

$$\lim_{\omega=\infty} I_1(\omega) = V(x)$$

ist,

II. zu jeder vorgegebenen beliebig kleinen Zahl ε sich eine Zahl $R > x + 1$ von der Beschaffenheit bestimmen läßt, daß *unabhängig von* ω

$$|I_2(\omega)| \leqq \varepsilon$$

wird.

Wir beweisen zunächst den zweiten Punkt. Da für $\sigma \geqq \gamma + \varepsilon, |t| \leqq \omega$ das Integral $\int_R^\infty V(u) e^{s(x-u)} du$ gleichmäßig in s konvergiert, so kann man die Integrationsfolgen in (11) vertauschen und erhält, indem man die Integration nach s zuerst ausführt,

$$I_2(\omega) = \frac{1}{2\pi i} \int_R^\infty V(u) \frac{e^{(\sigma+i\omega)(x-u)} - e^{(\sigma-i\omega)(x-u)}}{x-u} du.$$

Man erkennt unschwer, daß wegen $u - x > 1$

$$|I_2(\omega)| \leqq \frac{1}{\pi} \int_R^\infty |V(u)| e^{\sigma(x-u)} du$$

wird, also unabhängig von ω abgeschätzt ist. Wegen der vorausgesetzten absoluten Konvergenz kann man jetzt R so wählen, daß $I_2(\omega)$ unabhängig von ω beliebig klein gemacht werden kann. Damit ist II. bewiesen.

6. Im Falle, daß $V(u)$ gleich einer Treppenfunktion $A(u)$ ist, also im Falle Dirichletscher Reihen, beweist man I. am einfachsten, indem man das Integral $\int_0^R$ als Summe schreibt. Es ergibt sich nach einfachen Umformungen

$$s \int_0^R A(u) e^{-su} du = \sum_{\lambda_n < R} a_n e^{-\lambda_n s} - A(R) e^{-Rs}.$$

Diese endliche Dirichletsche Reihe läßt sich gliedweise integrieren; wenn man die Summe rechter Hand in (10) einsetzt, so erhält man

$$(13) \quad I_1(\omega) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{\lambda_n < R} a_n \int_{\sigma-i\omega}^{\sigma+i\omega} \frac{e^{(x-\lambda_n)s}}{s} ds - \frac{A(R)}{2\pi i} \int_{\sigma-i\omega}^{\sigma+i\omega} \frac{e^{(x-R)s}}{s} ds$$

Nach einer bekannten Formel[13]) ist aber

$$\lim_{\omega=\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\omega}^{\sigma+i\omega} \frac{e^{ys}}{s} ds = \begin{cases} 1 \text{ für } y > 0, \\ \frac{1}{2} \text{ für } y = 0, \\ 0 \text{ für } y < 0, \end{cases}$$

[13]) Vgl. etwa Landau, Handbuch, Bd. I, S. 342–345.

und wendet man diese Formeln auf die einzelnen Glieder der endlichen Summe (13) an, so ergibt sich

$$\lim_{\omega=\infty} I_1(\omega) = A(x).$$

Ist die Funktion $V(u)$ von allgemeinerer Gestalt, so läßt sich in folgender Weise schließen. Indem man in (10) die Integration nach s zuerst ausführt, wird

$$I_1(\omega) = \frac{1}{2\pi i}\int_0^R V(u)\frac{e^{(\sigma+i\omega)(x-u)} - e^{(\sigma-i\omega)(x-u)}}{x-u}du$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^R V(u)e^{\sigma(x-u)}\frac{\sin\omega(x-u)}{x-u}du.$$

Dies ist aber nichts anderes als das aus der Theorie der Fourierreihen bekannte Dirichletsche Integral[14]) und da nach Voraussetzung $V(u)$ für $0 \leqq u \leqq R$ von beschränkter Schwankung, ferner $0 \leqq x < R$ ist, so wird

$$\lim_{\omega=\infty} I_1(\omega) = V(x).$$

Damit ist unser allgemeiner Satz vollständig bewiesen.

7. Für Dirichletsche Reihen konvergiert die Riemannsche Formel (5), wenn $\alpha < 0$ ist, nur für $\sigma > 0$. Denn die Abschätzung

$$|A(u)| \leqq Ce^{(\alpha+\varepsilon)u},$$

aus der die absolute Konvergenz des Integrals (6)

$$f(s) = s\int_0^\infty A(u)e^{-su}du$$

für $\sigma > \alpha$ folgt, gilt nur im Falle $\alpha \geqq 0$.

Soll der Grenzwert (5) auch, wenn $\alpha < 0$ ist, in der ganzen Halbebene $\sigma > \alpha$ existieren, so muß man die Formel (5) passend abändern. Zu diesem Zwecke gehe man von der leicht zu beweisenden Beziehung

$$|f(0) - A(u)| \leqq Ce^{(\alpha+\varepsilon)u}$$

aus, die auch für den Fall $\alpha < 0$ gilt, und folgere aus ihr, daß die Integraldarstellung

$$f(s) = f(0) + s\int_0^\infty (A(u) - f(0))e^{-su}du \tag{14}$$

mindestens für $\sigma > \alpha$ absolut konvergiert. Ist also $\sigma > \gamma$ die Halbebene absoluter Konvergenz der Integraldarstellung (14), so ist gewiß $\gamma \leqq \alpha$.

---

[14]) Vgl. etwa Jordan, Cours d'Analyse, 2. Aufl., Bd. II, S. 233.

Wendet man auf (14) den eben bewiesenen Satz an, so ergibt sich

$$(15) \qquad A(x) - f(0) = \lim_{\omega=\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\omega}^{\sigma+i\omega} \frac{f(s)-f(0)}{s} e^{xs}\, ds$$

für $\sigma > \gamma$; der Grenzwert (15) existiert also erst recht für $\sigma > \alpha$, wobei nunmehr über die Größe α keinerlei einschränkende Voraussetzung gemacht ist.

§ 3.

8. Zum Schluß soll ein Beispiel einer Funktion angegeben werden, für die das Integral $s\int_0^\infty A(u)e^{-su}du$ eine absolute Konvergenzhalbebene hat, ohne daß die zugehörige Dirichletsche Reihe für irgendeinen Wert von s konvergiert.

Dieses Beispiel erscheint theoretisch dadurch von Interesse, daß es die Existenz einer Funktion $f(s)$ beweist, für die die Riemannsche Integraldarstellung der Koeffizientensummen gilt, ohne daß die mit Hilfe dieser Koeffizienten gebildete Dirichletsche Reihe überhaupt in irgendeinem Punkte konvergiert; bisher finden sich in der Literatur nur Beispiele von Funktionen $f(s)$[15]), die sich durch für $\sigma > \alpha$ konvergente Dirichletsche Reihen darstellen lassen, während das mit Hilfe dieser Funktionen gebildete Integral (5) auch noch für $\sigma < \alpha$ konvergiert.

Es sei

$$\lambda_{2n} = \log \nu_n, \quad \lambda_{2n+1} = \log \nu_n + e^{-(\log \nu_n)^2} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Hierbei bedeuten die ν_n ganze, positive Zahlen, die sukzessive so bestimmt sind, daß

$$\log \nu_{n+1} = \lambda_{2n+2} > \lambda_{2n+1} = \log \nu_n + e^{-(\log \nu_n)^2}$$

wird.

Es sei ferner

$$A(u) = 0 \quad \text{für } 0 \leqq u < \lambda_0, \quad \lambda_{2n-1} < u < \lambda_{2n},$$
$$A(u) = a_{2n} = e^{(\log \nu_n)^2} \quad \text{für } \lambda_{2n} < u < \lambda_{2n+1}.$$

Dann ist

$$(16) \quad f(s) = s\int_0^\infty A(u)e^{-su}du = \sum_{n=0}^{\infty} s\, a_{2n} \int_{\lambda_{2n}}^{\lambda_{2n+1}} e^{-su}\, du$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} (a_{2n} e^{-\lambda_{2n} s} - a_{2n} e^{-\lambda_{2n+1} s})$$
$$(17) \qquad \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s},$$

wobei $a_{2n+1} = -a_{2n}$ gesetzt ist.

[15]) Perron, l. c.[7]) S. 126–131. Vgl. auch Landau, Handbuch, Bd. II, S. 834 bis 837.

Man erkennt leicht, daß (16) mindestens für $\sigma > 1$ absolut konvergiert; denn es ist

$$|f(s)| \leqq |s| \sum_{n=0}^{\infty} |a_{2n}| (\lambda_{2n+1} - \lambda_{2n}) e^{-\sigma \lambda_{2n}}$$

$$\leqq |s| \sum_{n=0}^{\infty} e^{(\log \nu_n)^2} e^{-(\log \nu_n)^2} e^{-\sigma \log \nu_n}$$

$$= |s| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\nu_n^{\sigma}}.$$

Diese Reihe ist aber mindestens für $\sigma > 1$ absolut konvergent.

Andererseits kann aber die Dirichletsche Reihe (17) für keinen noch so großen Wert von σ konvergieren, denn es ist

$$|a_{2n} e^{-\lambda_{2n} s}| = e^{(\log \nu_n)^2 - \sigma \log \nu_n} = e^{\log \nu_n (\log \nu_n - \sigma)},$$

also

$$\lim_{n=\infty} |a_{2n} e^{-\lambda_{2n} s}| = \infty$$

für jedes noch so große σ.

(Eingegangen am 22. Dezember 1918.)

Eine neue Art von Zetafunktionen und ihre Beziehungen zur Verteilung der Primzahlen.

(Zweite Mitteilung.)

Von

E. Hecke in Hamburg.

In einer ersten Mitteilung gleichen Titels in Bd. 1 dieser Zeitschrift habe ich gezeigt, wie in jedem algebraischen Zahlkörper, der unendlich viele Einheiten enthält, sich außer den bekannten Zetafunktionen noch unendlich viele andere definieren lassen, welche alle auch eine Produktdarstellung zulassen. Sie liefern neue Sätze über die Verteilung der Primzahlen in Körpern bzw. den Formen n-ten Grades.

Wenn der betrachtete Körper nebst allen Konjugierten reell ist, erschöpfen die dort definierten Zetafunktionen im wesentlichen alle dieser Art. Für andere Körper dagegen, z. B. für imaginäre quadratische Körper, bedarf das dort zugrunde liegende Bildungsprinzip noch einer Verallgemeinerung, wie ich in der Einleitung schon andeutete. Auf diese Art entsteht dann für jeden Körper n-ten Grades eine Schar von Zetafunktionen

$$\zeta(s;\lambda)=\sum_{\mathfrak{a}}\frac{\lambda(\mathfrak{a})}{N(\mathfrak{a})^s},$$

worin die Koeffizienten $\lambda(\mathfrak{a})$ Funktionen des Ideals $\mathfrak{a}$ sind, welche von $r-1$ ganzzahligen Parametern abhängen, nicht nur von $r=r_1+r_2-1$ Parametern, wie in der früheren Arbeit.

Die bisher bekannten Sätze über Verteilung der Primideale oder überhaupt der Ideale oder Zahlen in algebraischen Körpern faßten nur eine Anordnung nach wachsender Norm ins Auge, also eine eindimensionale, während die Menge der Zahlen eines Körpers n-ten Grades ihrer Herkunft nach richtiger auf einer n-dimensionalen Mannigfaltigkeit verteilt werden müßte. Diese „analytische Zahlentheorie in n Dimensionen“ wird nun in der Tat durch die $\zeta(s;\lambda)$ möglich. Man kann sie, wenn man an die Kleinsche Definition der Geometrien denkt, geradezu als die Invarianten-

theorie einer n-dimensionalen Mannigfaltigkeit gegenüber einer unendliche diskontinuierlichen (Abelschen) Gruppe kennzeichnen, welche durch di Einheiten des Körpers bestimmt wird. Von dieser Mannigfaltigkeit inter essiert sodann die diskrete Teilmannigfaltigkeit, welche den algebraische Zahlen des Körpers entspricht.

Um den Charakter der Sätze anzudeuten, welche sich so für die Ver teilung der Primzahlen ergeben, führe ich als Beispiel an: Jede der Forme $x^2 + y^2$ oder $x^2 - 2y^2$ stellt unendlich viele Primzahlen dar, wenn man di ganzzahligen Variablen x, y auf einen beliebigen Winkelraum einschränkt der durch zwei vom Nullpunkt ausgehende Halbstrahlen begrenzt wird Überdies ist die Anzahl dieser Primzahlen unterhalb t asymptotisch pro portional der Größe dieses Winkels, gemessen in einer auf die betreffend Form gegründeten Klein-Cayleyschen Maßbestimmung. Dieses asym ptotische Gesetz zu beweisen, war mir früher auch nicht für die indefinitt Form $x^2 - 2y^2$ gelungen; ich habe erst jetzt einen überraschend einfache Beweis gefunden (§ 7), indem ich der Frage eine andere Wendung gab

Die Funktionen λ setzen sich im allgemeinen aus zwei Bestandteile zusammen, welche einzeln bei den quadratischen Körpern vorkommen Für Hauptideale (α), d. h. für Körperzahlen α, haben sie folgenden Bau

1. Im reellen quadratischen Körper mit der Grundeinheit ε:

$$\lambda(\alpha) = \exp\left\{\frac{\pi i}{\log|\varepsilon|}\log\left|\frac{\alpha}{\alpha'}\right|\right\} \qquad (\exp x = e^x)$$

2. Im imaginären quadratischen Körper mit der Diskriminant $-d$ $(d > 4)$:

$$\lambda(\alpha) = \left(\frac{\alpha}{|\alpha|}\right)^2.$$

Beide Funktionen hängen nur von dem Ideale (α) ab, d. h. sie habe für assoziierte Zahlen den gleichen Wert; und es gilt die Produktregel

$$\lambda(\alpha \cdot \beta) = \lambda(\alpha) \cdot \lambda(\beta).$$

Im § 1 dieser Arbeit gebe ich nun die allgemeinste Bestimmung de Funktionen λ, welche gewissen zwei Bedingungen genügen. Hat man ein mal diesen Ansatz, so ist die weitere Entwicklung (Aufstellung der $\zeta(s; \lambda)$ Zusammenhang mit den Thetafunktionen, Funktionalgleichung) fast vo selbst gegeben. Die wirkliche Durchführung verlangt allerdings ziemlic erhebliche Rechnungen. Ich habe nun versucht, hier durch eine metho dische Neuerung etwas mehr Durchsichtigkeit zu schaffen. *Der Zahl körper k* wird in § 2 nämlich *erweitert zu dem Bereich idealer Zahlen* der sich durch Multiplikation und Division reproduziert, und worin jede Ideal ein Hauptideal ist. Die Möglichkeit, eine solche Erweiterung vo nehmen zu können, dürfte jedem Zahlentheoretiker bekannt sein; trotzdem

at sich bisher kein Anlaß ergeben, davon Gebrauch zu machen. Hier ist in solcher vorhanden; die Formeln und die Ausdrucksweise vereinfachen ich wesentlich, wenn man in der Lage ist, jedes Ideal durch eine wirkche algebraische Zahl repräsentieren zu können. Charakteristisch für diese Untersuchung ist gerade, daß die Ideale nicht als Systeme von Zahlen, wie bei Dedekind, auftreten, sondern als wirkliche Zahlindividuen, die allerdings höheren Körpern angehören, denen aber jedenfalls eine Größe zukommt. Mit Rücksicht darauf habe ich die Funktionen $\lambda(\alpha)$ als „Größencharaktere" von α bezeichnet und den weniger passenden Namen „Charaktere nach den Einheiten" aus der ersten Arbeit fallen gelassen; § 3 enthält die Bestimmung aller Größencharaktere für Ideale. Im § 4 bringe ich die schon mehrfach behandelte Theorie der Restklassencharaktere und gewisser, den Gaußschen analogen Summen, welche damit zusammenhängen. Diese Sätze vereinfachen sich bei Benutzung der idealen Zahlen, ebenso wie § 5, worin die fundamentale Transformationsformel der Thetafunktionen, die in den früheren Untersuchungen die Hauptsache war, erheblich verallgemeinert wird; § 6 endlich enthält die Darstellung der Zeta durch die Thetafunktionen und ihre Funktionalgleichung. Ich erwähne noch, daß die analogen Sätze für alle früheren Zeta- und L-Funktionen, auch die für den engsten Äquivalenzbegriff, wo Herr Landau die Rechnung durchgeführt hat, in diesem § 6 miterledigt werden.

Etwas Neues enthält § 7, wo ich durch Kombination der bekannten Methoden mit einem Satze von H. Weyl über Gleichverteilung von Zahlen mod 1 den oben erwähnten Satz über die asymptotische Verteilung von Primzahlen für einen beliebigen Körper beweise. In den folgenden Paragraphen ist dann nur von quadratischen Körpern die Rede. Im § 8 handelt es sich um die Zahlen, welche durch eine binäre Linearform des Körpers oder des Bereiches idealer Zahlen dargestellt werden, sowie um den Zusammenhang zwischen diesen und den quadratischen Formen; § 9 spezialisiert alle Resultate für den imaginären quadratischen Körper bzw. definite Formen, § 10 für den reellen quadratischen Körper und die indefiniten Formen.

§ 1.

Größencharaktere einer Zahl mod $\mathfrak{f}$.

Es bedeute $\mathfrak{f}$ ein ganzes von Null verschiedenes Ideal des Körpers k. Die Gesamtheit derjenigen Einheiten von k, welche

$$\text{total positiv und kongruent } 1 \bmod \mathfrak{f}$$

sind, lassen sich auf Grund der allgemeinen Theorie der Einheiten durch $r = r_1 + r_2 - 1$ „Grundeinheiten mod $\mathfrak{f}$" $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_r$ und erforderlichenfalls noch einer Einheitswurzel ξ in der Form

(1) $$\eta = \xi^a \eta_1^{n_1} \eta_2^{n_2} \dots \eta_r^{n_r}$$

darstellen, wo $n_1, \dots, n_r$ sämtliche ganzen rationalen Zahlen, a dagegen die Zahlen $0, 1, \dots, g-1$ $(\xi^g = 1)$ durchlaufen. Ein solches System $\eta_1, \dots, \eta_r$ heiße ein System von *Grundeinheiten mod* $\mathfrak{f}$, die Zahlen (1) kurz *Einheiten mod* $\mathfrak{f}$. Beliebige Einheiten von k sollen immer mit η bezeichnet werden. Einheiten mod 1 heißen demzufolge die total positiven Einheiten.

Wir ordnen jetzt jedem der konjugierten Körper $k^{(p)}$ eine Variable x_p zu mit der Einschränkung

$$x_p > 0, \qquad (p = 1, 2, \dots, r_1)$$

$0 + x_{p+r_2}$ konjugiert imaginär mit x_p. $\qquad (p = r_1 + 1, \dots, r_1 + r_2)$

(Die konjugiert imaginäre Zahl zu einer Zahl x soll mit $\bar{x}$ bezeichnet werden.) Nunmehr fragen wir nach der allgemeinsten für diese Argumente *stetigen* Funktion F, welche folgende beide Eigenschaften hat:

1. $F(x_1, x_2, \dots)\, F(y_1, y_2, \dots) = F(x_1 y_1, x_2 y_2, \dots)$,
2. $F(\eta^{(1)} x_1, \eta^{(2)} x_2, \dots) = F(x_1, x_2, \dots)$ für jede Einheit η mod $\mathfrak{f}$.

Gibt es außer 1 keine Einheit mod $\mathfrak{f}$, was nur in imaginär quadratischen Körpern zutreffen kann, so wird die zweite Forderung inhaltlos.

Als allgemeinste stetige Lösung von 1. ergibt sich bekanntlich

$$F = \prod_{p=1}^{r+1} |x_p|^{s_p} \prod_{p=r_1+1}^{n} \left(\frac{x_p}{|x_p|}\right)^{a_p},$$

wo $s_1, s_2, \dots, s_{r+1}$ willkürlich reell oder komplex, die a dagegen ganzrationale Zahlen. Vermehren wir zwei Exponenten a_p, deren Indizes konjugiert imaginären Körpern entsprechen, gleichzeitig um dieselbe Zahl c, so bleibt F unverändert. Wir verabreden nun folgende eindeutige Wahl der a_p:

$$a_p \geqq 0,$$

$$a_p a_{p+r_2} = 0. \qquad (p = r_1 + 1, \dots, r_1 + r_2)$$

D. h. von zwei konjugiert imaginären Faktoren $\frac{x_p}{|x_p|}$ tritt in F stets nur einer auf, und zwar mit positivem ganzem Exponenten.

Um die Forderung 2. zu erfüllen, gehen wir von den x zu den Logarithmen über und führen das mit Hilfe der Einheiten $\eta_1, \dots, \eta_r$ gebildete Schema e_p, $e_p^{(q)}$ ein (wie in § 1 der ersten Mitteilung), definiert durch die Gleichungen

$$\frac{e_q}{n} + \sum_{k=1}^{r} e_q^{(k)} \log |\eta_k^{(p)}| = \delta_{pq}, \qquad (p, q = 1, 2, \dots, r+1)$$

oder auch durch

$$\frac{1}{n}\sum_{q=1}^{r+1} e_q = 1, \qquad \sum_{q=1}^{r+1} e_q^{(p)} = 0, \qquad (p = 1, 2, \ldots, r)$$

$$\sum_{q=1}^{r+1} e_q \log|\eta_p^{(q)}| = 0,$$

$$\sum_{p=1}^{r+1} e_p^{(q)} \log|\eta_k^{(p)}| = \delta_{kq}. \qquad (k, q = 1, 2, \ldots, r)$$

Falls $r_2 > 0$, brauchen wir aber jetzt auch noch die Amplituden der η. Wir setzen

$$\eta_k^{(p)} = |\eta_k^{(p)}| e^{i\vartheta_k^{(p)}} \qquad (k = 1, \ldots, r, \quad p = 1, 2, \ldots, n)$$

mit den Bestimmungen

$$\vartheta_k^{(p)} = 0 \quad \text{für} \quad p = 1, 2, \ldots, r_1,$$

$$\vartheta_k^{(p)} = -\vartheta_k^{(p+r_2)} \quad \text{für} \quad p = r_1 + 1, \ldots, r_1 + r_2.$$

Die Vielfachen von 2π, welche alsdann noch in den ϑ unbestimmt bleiben, wählen wir beliebig, aber fest. Durch Einführung von

$$N(x) = x_1 x_2 \ldots x_n, \quad (N(x) > 0)$$

$$c_q(x) = \sum_{p=1}^{r+1} e_p^{(q)} \log|x_p| \qquad (q = 1, \ldots, r)$$

verwandelt sich F unter Abänderung der Bedeutung der s in

$$F = N(x)^s \prod_{q=1}^{r} e^{s_q c_q(x)} \prod_{p=r_1+1}^{n} \left(\frac{x_p}{|x_p|}\right)^{a_p}.$$

Damit dann

$$F(\eta_k x) = F(x),$$

ist notwendig und hinreichend, daß

$$s_k + i\sum_{p=r_1+1}^{n} a_p \vartheta_k^{(p)} = 2\pi i m_k,$$

wo m_k eine ganze rationale Zahl. Falls noch eine Einheitswurzel ξ mod $\mathfrak{f}$ existiert, müssen überdies, wenn

$$F(\xi x) = F(x),$$

die a nach einer gewissen Kongruenz

$$\sum_{p=r_1+1}^{n} A_p a_p \equiv 0 \pmod{g} \qquad (2)$$

genügen, deren Koeffizienten A ganze rationale, nur vom Körper abhängige Zahlen (übrigens zu g prim) sind.

Somit folgt als allgemeinste Lösung von 1. und 2.:

$$F(x) = N(x)^s \prod_{q=1}^{r} e^{2\pi i m_q c_q(x)} \cdot \prod_{p=r_1+1}^{n} \left(\frac{x_p}{|x_p|} e^{i \sum_{k=1}^{r} \vartheta_k^{(p)} c_k(x)} \right)^{a_p}$$

wo

(2a)
s beliebig komplex,
$m_1, \ldots, m_r$ beliebig ganz rational,
$a_{r_1+1}, \ldots, a_n$ ganz rational, $a_p \geqq 0$, $a_p a_{p+r_2} = 0$,
und für die a (falls $g > 1$) noch die Kongruenz (2) besteht.

Wir betrachten insbesondere diejenigen dieser Funktionen, welche vom $N(x)$ unabhängig sind, d. h. $s = 0$ haben. Sie sind dadurch ausgezeichnet, daß sie sich nicht ändern, wenn $x_1, x_2, \ldots, x_n$ mit demselben positiven Faktor multipliziert werden. Eine jede dieser Funktionen

$$\lambda(x) = \prod_{q=1}^{r} e^{2\pi i m_q c_q(x)} \prod_{p=r_1+1}^{n} \left(\frac{x_p}{|x_p|} e^{i \sum_{k=1}^{r} \vartheta_k^{(p)} c_k(x)} \right)^{a_p} \tag{3}$$

mit den Bedingungen (2) und (2a) heiße ein *Größencharakter von x mod $\mathfrak{f}$*.

Die Größencharaktere mod $\mathfrak{f}$ bilden offenbar bei Komposition durch Multiplikation eine unendliche Abelsche Gruppe von $n-1$ Basiselementen

$$\lambda_1(x), \lambda_2(x), \ldots, \lambda_{n-1}(x),$$

welche *Grundcharaktere* mod $\mathfrak{f}$ heißen mögen. Durch die Werte dieser $n-1$ Funktionen und die Angabe von $N(x)$ werden die Argumente $x_1, \ldots, x_n$ bis auf eine Einheit mod $\mathfrak{f}$ als Faktor eindeutig festgelegt. Der in § 1 der ersten Mitteilung am Schluß angegebene Satz ist in der dortigen Formulierung nur für $r_2 = 0$ richtig.

Wir erweitern jetzt die Definition der $\lambda(x)$ auf solche Argumente, wo die ersten $x_1, \ldots, x_{r_1}$ beliebig komplex (aber $\neq 0$), die übrigen aber immer noch paarweise konjugiert imaginär sind, indem wir setzen

$$\lambda(x_1, \ldots, x_n) = \lambda(|x_1|, \ldots, |x_{r_1}|, x_{r_1+1}, \ldots, x_n).$$

Insbesondere treten im folgenden solche Argumente auf, welche die n Konjugierten einer Zahl μ aus k sind. Die entsprechende Funktion werde kurz $\lambda(\mu)$ geschrieben. Es ist also

1. $\lambda(\alpha) \cdot \lambda(\beta) = \lambda(\alpha\beta)$,
2. $\lambda(\eta\alpha) = \lambda(\alpha)$,
3. $|\lambda(\alpha)| = 1$

für irgendzwei von Null verschiedene Zahlen α, β aus k.

§ 2.

Einführung idealer Zahlen.

Um die eben eingeführten Größencharaktere auch für *Ideale* zu erklären, ist es zweckmäßig, den Bereich k zu einem solchen Zahlbereich zu erweitern, in welchem alle Ideale durch Zahlen repräsentiert werden. Die Möglichkeit einer solchen Erweiterung ist wohlbekannt und beruht im wesentlichen auf der Endlichkeit der Klassenzahl h. Man hat bisher, soviel mir bekannt, nur selten davon Gebrauch gemacht[1]); für den vorliegenden Zweck bedeutet aber die Einführung idealer Zahlen an Stelle der Ideale eine erhebliche Vereinfachung des Formelapparates.

Einen *Bereich idealer Zahlen zu* k — er werde durch $\mathfrak{Z}$ bezeichnet — definieren wir durch folgende Postulate:

1. Wenn α und β zu $\mathfrak{Z}$ gehören, dann auch $\alpha \cdot \beta$,
2. Zu jedem Ideal $\mathfrak{a}$ aus k gibt es eine Zahl α aus $\mathfrak{Z}$ derart, daß

$$\mathfrak{a} = (\alpha)$$

und umgekehrt,

3. Wenn α, β zu $\mathfrak{Z}$ gehören und $(\alpha) = (\beta)$, dann ist

$$\alpha = \varepsilon\beta,$$

wo ε eine *Einheit aus* k bedeutet.

Wir zeigen, daß sich stets ein solcher Bereich $\mathfrak{Z}$ konstruieren läßt, und zwar nur auf endlich viele Arten. Wir betrachten zu diesem Zwecke die Gruppe der Idealklassen in k (Klasse im üblichen weitesten Sinne genommen), denken sie uns durch eine Basis dargestellt, und aus jeder Basisklasse ein Ideal $\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2, \ldots, \mathfrak{b}_e$ ausgewählt. Es läßt sich daher jedes (ganze oder gebrochene) Ideal aus k in der Form

$$\mathfrak{a} = \varrho\, \mathfrak{b}_1^{a_1} \mathfrak{b}_2^{a_2} \ldots \mathfrak{b}_e^{a_e} \tag{4}$$

darstellen, wo ϱ eine Zahl aus k ist, jeder der ganzen rationalen Exponenten $a_i \bmod h_i$ eindeutig bestimmt ist und h_i die kleinste positive ganze Zahl, wofür

$$\mathfrak{b}_i^{h_i} = (\beta_i)$$

ein Hauptideal in k, d. h. β_i eine Zahl in k ist. Offenbar ist der Bereich $\mathfrak{Z}$ eindeutig bestimmt, wenn man weiß, durch welche Zahlen aus $\mathfrak{Z}$ die e Ideale $\mathfrak{b}_1, \ldots, \mathfrak{b}_e$ repräsentiert werden. Soll etwa $\mathfrak{b}_i$ durch $\hat{\beta}_i$ repräsentiert werden, so muß sein

$$\hat{\beta}_i^{h_i} = \varepsilon_i \beta_i,$$

[1]) Siehe etwa F. Klein, Zahlentheorie (autogr. Vorlesung), Göttingen 1896/97, gelegentlich der Kompositionstheorie quadratischer Formen.

wo ε_i eine Einheit in k. $\hat{\beta}_i$ und die zugehörige Reihe assoziierter Zahlen ist daher endlich-vieldeutig bestimmt. Umgekehrt, setzen wir

$$\hat{\beta}_i = \sqrt[h_i]{\beta_i}, \qquad (i = 1, 2, \ldots, e) \tag{5}$$

wo die Wurzel irgendwie gewählt wird, so erhalten wir offenbar ein System idealer Zahlen $\mathfrak{Z}$ zu k in der Form

$$\varrho\, \hat{\beta}_1^{a_1} \hat{\beta}_2^{a_2} \cdots \hat{\beta}_e^{a_e},$$

worin ϱ alle ganzen und gebrochenen Zahlen aus k, die $a_1, \ldots, a_e$ alle ganzen rationalen Zahlen bzw. mod $h_1, h_2, \ldots, h_e$ durchlaufen.

Der Bereich $\mathfrak{Z}$ ist eine Zahlgruppe im Sinne von H. Weber (Zahlstrahl nach Herrn Fueter), unterscheidet sich aber von den sonst betrachteten Zahlgruppen dadurch, daß er den Körper k enthält.

Offenbar kann $\mathfrak{Z}$ auch definiert werden als ein kleinster Bereich, der k enthält, in dem außer Multiplikation und Division die Operation des größten-gemeinsamen-Teiler-Bildens unbeschränkt ausführbar ist, mit der Nebehbedingung, daß alle in ihm enthaltenen Einheiten zu k gehören.

Wir verabreden nach Definition der $\hat{\beta}_i$ aus (5) gleichzeitig die Definition von n Konjugierten

$$\hat{\beta}_i^{(p)} = \sqrt[h_i]{\beta_i^{(p)}}, \qquad (p = 1, 2, \ldots, n)$$

indem wir die Wurzeln aus den konjugierten Zahlen $\beta_i^{(p)}$ beliebig, aber fest so wählen, daß

$$\hat{\beta}_i^{(p)} \text{ konjugiert imaginär zu } \hat{\beta}_i^{(q)},$$

wenn

$$k^{(p)} \text{ konjugiert imaginär zu } k^{(q)}.$$

Ein so definierter Bereich $\mathfrak{Z}$ und die Reihe seiner Konjugierten $\mathfrak{Z}^{(1)}, \ldots, \mathfrak{Z}^{(n)}$ werden nun als fest der weiteren Untersuchung zugrunde gelegt. Die in ihm enthaltenen Zahlen sollen durch ein darübergesetztes $\hat{}$ markiert werden.

Auf den Bereich $\mathfrak{Z}$ überträgt sich nun sogleich die Klasseneinteilung der Ideale. $\mathfrak{Z}$ zerfällt in h Klassen von Zahlen. Die Zahlen ein und derselben Klasse reproduzieren sich durch Addition und Subtraktion. Die Hauptklasse besteht aus allen Zahlen von k. Die Zahlen einer Klasse besitzen eine Basis, d. h. es gibt ein System von n ganzen Zahlen der Klasse $\hat{\omega}_1, \ldots, \hat{\omega}_n$ derart, daß jede ganze Zahl dieser Klasse in der Gestalt

$$x_1 \hat{\omega}_1 + \ldots + x_n \omega_n$$

mit ganzen rationalen $x_1, \ldots, x_n$ darstellbar ist. Die Determinante der $\hat{\alpha}$

und ihrer Konjugierten ist (als Ideal) gleich der Quadratwurzel aus der Körperdiskriminante. Zu jeder Zahl $\hat{\mu}$ definieren wir

$$N(\hat{\mu}) = \hat{\mu}^{(1)}\,\hat{\mu}^{(2)}\ldots,\,\hat{\mu}^{(n)}.$$

Der Betrag von $N(\hat{\mu})$ ist eine rationale Zahl, für ganze $\hat{\mu}$ eine ganze rationale Zahl.

Die Kongruenz

$$\hat{\alpha} \equiv \hat{\beta} \pmod{\hat{\varphi}}$$

soll bedeuten: $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$ gehören derselben Klasse an und $\hat{\alpha} - \hat{\beta}$ ist durch $\hat{\varphi}$ teilbar. Die Anzahl aller inkongruenten ganzen Zahlen mod φ, welche ein und derselben Klasse angehören, ist $|N(\hat{\varphi})|$. Auch übertragen sich die Sätze über Lösbarkeit einer oder mehrerer linearer Kongruenzen ohne Schwierigkeit auf den Bereich $\mathfrak{Z}$.

Nach dem ganzen Modul $\mathfrak{f} = (\hat{\varphi})$ teilen wir die ganzen zu $\mathfrak{f}$ primen Zahlen aus $\mathfrak{Z}$ in Klassen ein:

a) *Weiterer Klassenbegriff*: $\hat{\alpha}$ und $\hat{\beta}$ kommen in dieselbe Klasse mod $\hat{\varphi}$, wenn

$$\hat{\alpha} \equiv \hat{\beta} \pmod{\mathfrak{f}}.$$

Diese Klassen bilden eine Abelsche Gruppe vom Grade $h\varphi(\mathfrak{f})$, die mit $\mathfrak{Z}(\mathfrak{f})$ bezeichnet sei.

b) *Engerer Klassenbegriff*: $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$ kommen in dieselbe Klasse, wenn

$$\hat{\alpha} \equiv \hat{\beta} \pmod{\mathfrak{f}}, \quad \frac{\hat{\alpha}}{\hat{\beta}} \text{ total positiv.}$$

Diese Klassen bilden eine Abelsche Gruppe vom Grade $2^{r_1} h\varphi(\mathfrak{f})$, die mit $\mathfrak{Z}_0(\mathfrak{f})$ bezeichnet sei.

Jeder Klasse kommen dann im Sinne der Gruppentheorie innerhalb ihrer Gruppe gewisse Gruppencharaktere zu. Ist $\hat{\alpha}$ eine ganze zu $\mathfrak{f}$ prime Zahl, so werde der Gruppencharakter der Klasse von $\hat{\alpha}$

im Falle a) mit $\chi(\hat{\alpha})$, im Falle b) mit $\chi_0(\hat{\alpha})$

bezeichnet. Es ist also, wenn $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$ zu $\mathfrak{f}$ prim,

$$\chi(\hat{\alpha}) = \chi(\hat{\beta}), \text{ wenn } \hat{\alpha} \equiv \hat{\beta} \pmod{\mathfrak{f}},$$

$$\chi_0(\hat{\alpha}) = \chi_0(\hat{\beta}), \text{ wenn } \hat{\alpha} \equiv \hat{\beta} \pmod{\mathfrak{f}}, \quad \frac{\hat{\alpha}}{\hat{\beta}} \text{ total positiv,}$$

$$\chi(\hat{\alpha})\chi(\hat{\beta}) = \chi(\hat{\alpha}\hat{\beta}); \quad \chi_0(\hat{\alpha})\chi_0(\hat{\beta}) = \chi_0(\hat{\alpha}\hat{\beta}).$$

Diese Gleichungen enthalten bekanntlich die vollständige Definition aller möglichen Gruppencharaktere. Jedes χ ist ein χ_0, aber nicht umgekehrt. Wir setzen weiter

$$\chi_0\left(\frac{\hat{\alpha}}{\hat{\beta}}\right) = \frac{\chi_0(\hat{\alpha})}{\chi_0(\hat{\beta})}.$$

Zwischen den χ und χ_0 besteht folgender Zusammenhang: Für die Zahlen

$$\alpha \equiv 1 \pmod{\mathfrak{f}}$$

ist $\chi_0(\alpha)^2 = \chi_0(\alpha^2) = 1$, daher $\chi_0(\alpha) = \pm 1$. Daraus folgt, daß (immer nur für $\alpha \equiv 1 \pmod{\mathfrak{f}}$)

$$\chi_0(\alpha) = (\operatorname{sgn}\alpha^{(1)})^{a_1} (\operatorname{sgn}\alpha^{(2)})^{a_2} \dots (\operatorname{sgn}\alpha^{(r_1)})^{a_{r_1}}$$

ist, wo $a_1, \dots, a_{r_1}$ die Werte 0 oder 1 haben. Für reelle α ist dabei

$$\operatorname{sgn}\alpha = \frac{\alpha}{|\alpha|}.$$

Folglich ist

$$g(\hat{\alpha}) = \chi_0(\hat{\alpha}) \left(\frac{\hat{\alpha}^{(1)}}{|\hat{\alpha}^{(1)}|}\right)^{-a_1} \dots \left(\frac{\hat{\alpha}^{(r_1)}}{|\hat{\alpha}^{(r_1)}|}\right)^{-a_{r_1}}$$

ein Charakter der Gruppe $\mathfrak{Z}(\mathfrak{f})$, also mit einem $\chi(\hat{\alpha})$ identisch, denn er erfüllt die Definitionsgleichungen. Es gibt daher zu jedem $\chi_0(\hat{\alpha})$ ein $\chi(\alpha)$, derart, daß

$$\chi_0(\hat{\alpha}) = v(\hat{\alpha})\chi(\hat{\alpha}), \tag{6}$$

wobei

$$v(\hat{\alpha}) = \left(\frac{\hat{\alpha}^{(1)}}{|\hat{\alpha}^{(1)}|}\right)^{a_1} \dots \left(\frac{\hat{\alpha}^{(r_1)}}{|\hat{\alpha}^{(r_1)}|}\right)^{a_{r_1}} \qquad (a_i = 0 \text{ oder } 1) \tag{7}$$

eine Funktion von $\hat{\alpha}$ ist, die zweckmäßig als *Vorzeichencharakter* von $\hat{\alpha}$ bezeichnet wird. $v^2(\hat{\alpha})$ ist offenbar ein Charakter von $\mathfrak{Z}(1)$, unabhängig von $\mathfrak{f}$. Die Zerlegung von $\bar{\chi}_0$ liefert daher dasselbe v, aber $\frac{\bar{\chi}}{v^2}$ an Stelle von χ.

§ 3.

Gruppen- und Größencharaktere für Ideale.

Analog wie die Einteilung der *Zahlen* von $\mathfrak{Z}$ nach dem Modul $\mathfrak{f}$ läßt sich auch eine Einteilung der *Ideale* $(\hat{\alpha})$ von $\mathfrak{Z} \bmod \mathfrak{f}$ definieren:

a) *Weiterer Klassenbegriff* für Ideale $\bmod \mathfrak{f}$. Zwei ganze zu $\mathfrak{f}$ prime Ideale $(\hat{\alpha})$ und $(\hat{\beta})$ heißen äquivalent $\bmod \mathfrak{f}$, wenn es eine Einheit ε in k gibt, so daß

$$\hat{\alpha} \equiv \varepsilon\hat{\beta} \pmod{\mathfrak{f}}.$$

Äquivalente Ideale bilden eine Klasse $\bmod \mathfrak{f}$, das System dieser endlich vielen Klassen bildet eine Abelsche Gruppe $\mathfrak{Z}(\mathfrak{f})$ vom Grade $h(\mathfrak{f})$.

b) *Engerer Klassenbegriff*: $(\hat{\alpha})$ und $(\hat{\beta})$ heißen äquivalent $\bmod \mathfrak{f}$, wenn für irgend eine Einheit ε in k

$$\hat{\alpha} \equiv \hat{\beta}\varepsilon \pmod{\mathfrak{f}}, \quad \frac{\hat{\alpha}}{\varepsilon\hat{\beta}} \text{ total positiv.}$$

Die so bestimmte Gruppe von Idealklassen werde $\mathfrak{J}_0(\mathfrak{f})$ genannt, ihr Grad $h_0(\mathfrak{f})$. Die entsprechenden Gruppencharaktere bezeichnen wir mit

$$\chi((\hat{\alpha})) \text{ bzw. } \chi_0((\hat{\alpha}))$$

und nennen sie *Klassen- oder Gruppencharaktere von* $(\hat{\alpha})$. Jeder dieser Charaktere kommt natürlich bereits unter den in § 2 genannten Charakteren $\chi(\hat{\alpha})$ bzw. $\chi_0(\hat{\alpha})$ vor.

Neben diese bekannten Klassencharaktere von Idealen treten nun aber als etwas Neues die *Größencharaktere* von Idealen, welche aus den Funktionen $\lambda(\hat{\alpha})$ entspringen. Aus einem Größencharakter der Zahl $\hat{\alpha} \bmod \mathfrak{f}$, $\lambda(\hat{\alpha})$, soll ein Größencharakter $\lambda((\hat{\alpha}))$ des Ideals $(\hat{\alpha}) \bmod \mathfrak{f}$ hergeleitet werden durch die Forderungen:

1) $\lambda((\varepsilon\hat{\alpha})) = \lambda((\hat{\alpha}))$ für jede Einheit ε in k,

2) $\lambda((\hat{\alpha})) = \lambda(\hat{\alpha})$, wenn $\hat{\alpha} \equiv 1 \pmod{\mathfrak{f}}$ und total positiv,

3) $\lambda((\hat{\alpha}))\lambda((\hat{\beta})) = \lambda((\hat{\alpha}\hat{\beta}))$

für irgendwelche ganze Zahlen $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$, die zu $\mathfrak{f}$ prim sind.

Daß überhaupt ein solches $\lambda((\hat{\alpha}))$ existiert, läßt sich sofort beweisen, indem man die Gruppe $\mathfrak{J}_0(\mathfrak{f})$ durch eine Basis darstellt und ähnlich wie im § 2 schließt. Mit $\lambda((\hat{\alpha}))$ hat gleichzeitig auch

$$\lambda((\hat{\alpha}))\chi_0((\hat{\alpha}))$$

die Eigenschaften 1. bis 3., unter $\chi\cdot((\hat{\alpha}))$ einem beliebigen Klassencharakter von $\mathfrak{J}_0(\mathfrak{f})$ verstanden. Zu jedem $\lambda((\hat{\alpha}))$ gibt es im übrigen ein $\chi_0(\hat{\alpha})$, derart daß

$$\lambda((\hat{\alpha})) = \lambda(\hat{\alpha})\chi_0(\hat{\alpha})$$

Denn der Quotient

$$\frac{\lambda((\hat{\alpha}))}{\lambda(\hat{\alpha})} = g(\hat{\alpha})$$

erfüllt ja die Definitionsgleichungen eines χ_0. Das χ_0 bestimmt nun nach (6) einen Vorzeichencharakter $v(\hat{\alpha})$ von der Form (7) und damit gewisse r_1 Exponenten $a_1, \ldots, a_{r_1}$ (= 0 oder 1).

Jeder Größencharakter des Ideals $(\hat{\alpha}) \bmod \mathfrak{f}$ hat daher die Gestalt

$$\lambda((\hat{\alpha})) = \lambda(\hat{\alpha})\chi(\hat{\alpha})v(\hat{\alpha}) \tag{8}$$

und bestimmt dadurch eindeutig gewisse n nicht negative ganze Zahlen $a_1, \ldots, a_n$, nämlich

$$a_1, a_2, \ldots, a_{r_1},$$

die Exponenten in $v(\hat{\alpha})$, (0 oder 1) und

$$a_{r_1+1}, \ldots, a_n,$$

die so bezeichneten in $\lambda(\hat{\alpha})$ vorkommenden Exponenten, von denen die

Hälfte stets den Wert Null hat. Das System dieser n Zahlen heiße das *Exponentensystem von* $\lambda((\hat{\alpha}))$. Die reziproke Funktion

$$(9) \qquad \bar{\lambda}((\hat{\alpha})) = \frac{1}{\lambda((\hat{\alpha}))} = \bar{\lambda}(\hat{\alpha}) \frac{\overline{\chi((\hat{\alpha}))}}{v^2(\hat{\alpha})} \cdot v(\hat{\alpha})$$

ist offenbar auch ein Größencharakter des Ideals $(\hat{\alpha}) \bmod \mathfrak{f}$. Ihr Exponentensystem sei $a_1', \ldots, a_n'$. Dann ist offenbar

$$a_p' = a_p, \qquad (1 \leqq p \leqq r_1)$$

$$a_{p+r_2}' = a_p, \quad a_p' = a_{p+r_2}, \qquad (r_1 + 1 \leqq p \leqq r_2).$$

Um den Ausnahmefall, daß $\lambda(\hat{\alpha})$ identisch 1 ist, kurz bezeichnen zu können, reden wir von einem *echten Größencharakter* $\lambda((\hat{\alpha}))$, falls das zugehörige $\lambda(\hat{\alpha})$ nicht identisch 1 ist.

§ 4.

Eigentliche und uneigentliche Charaktere.

Ein Charakter $\chi(\hat{\alpha})$ der Gruppe $\mathfrak{Z}(\mathfrak{f})$ heiße ein *eigentlicher* Charakter mod $\mathfrak{f}$, wenn er nicht übereinstimmt mit einem Charakter von $\mathfrak{Z}(\mathfrak{f}_1)$, wo $\mathfrak{f}_1$ ein Teiler von $\mathfrak{f}$ ist. D. h. es soll keinen echten Teiler $\mathfrak{f}_1$ von $\mathfrak{f}$ geben, so daß aus

$$\hat{\alpha} \equiv \hat{\beta} (\bmod \mathfrak{f}_1)$$

schon folgt

$$\chi(\hat{\alpha}) = \chi(\hat{\beta}).$$

Existiert andrerseits ein echter, d. h. von $\mathfrak{f}$ verschiedener Teiler $\mathfrak{f}_1$ von $\mathfrak{f}$ derart, daß aus

$$\hat{\alpha} \equiv \hat{\beta} (\bmod \mathfrak{f}_1)$$

folgt

$$\chi(\hat{\alpha}) = \chi(\hat{\beta}),$$

so heiße χ ein *uneigentlicher* Charakter mod $\mathfrak{f}$. Ein solcher definiert auf folgende Art einen Charakter χ' von $\mathfrak{Z}(\mathfrak{f}_1)$: Sei $\hat{\alpha}$ zu $\mathfrak{f}_1$ prim, so wähle man ein $\hat{\beta}$ mit

$$\hat{\alpha} \equiv \hat{\beta} (\bmod \mathfrak{f}_1),$$

wo aber

$$(\hat{\beta}, \mathfrak{f}) = 1.$$

Alsdann setzen wir

$$\chi'(\hat{\alpha}) = \chi(\hat{\beta}).$$

Diese Funktion $\chi'(\hat{\alpha})$ ist ersichtlich ein Charakter von $\mathfrak{Z}(\mathfrak{f}_1)$. Er ist durch χ eindeutig bestimmt. Wir nennen χ' den durch χ erzeugten Charakter nach $\mathfrak{f}_1$.

Wenn χ einen Charakter nach $\mathfrak{f}_1$ und einen nach $\mathfrak{f}_2$ erzeugt, so erzeugt es auch einen nach $\mathfrak{f}_3$, wo $\mathfrak{f}_3 = (\mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2)$.

Ist nämlich

$$\hat{\alpha} \equiv \hat{\beta} \pmod{\mathfrak{f}_3}$$

und $\hat{\alpha}, \beta$ zu $\mathfrak{f}$ prim, so läßt sich eine Zahl $\hat{\mu}$ bestimmen, wofür

$$\hat{\mu} \equiv \hat{\alpha} \pmod{\mathfrak{f}_1},$$
$$\hat{\mu} \equiv \hat{\beta} \pmod{\mathfrak{f}_2}.$$

Nach Voraussetzung ist also $\chi(\hat{\mu}) = \chi(\hat{\alpha})$ und $\chi(\hat{\mu}) = \chi(\hat{\beta})$, daher auch

$$\chi(\hat{\alpha}) = \chi(\hat{\beta})$$

d. h. χ erzeugt einen Charakter mod $\mathfrak{f}_3$.

Hieraus folgt: Wenn χ ein uneigentlicher Charakter nach $\mathfrak{f}$ ist, und alle von ihm erzeugten Charaktere solche nach $\mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2, \ldots$ sind, so erzeugt χ nach einem ganz bestimmten $\mathfrak{f}'$ einen eigentlichen Charakter χ' und zwar ist

$$\mathfrak{f}' = (\mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2, \ldots).$$

Nach dem vorhergehenden Satz erzeugt nämlich χ sicher einen Charakter χ' nach $\mathfrak{f}'$. Wäre dieser uneigentlich nach $\mathfrak{f}'$ so würde er wiederum einen Charakter nach einem echten Teiler $\mathfrak{f}_0'$ von $\mathfrak{f}'$ erzeugen, und dieser müßte dann auch bereits durch χ erzeugt werden. Nach Voraussetzung ginge dann $\mathfrak{f}'$ in $\mathfrak{f}_0'$ auf, was nicht der Fall ist.

Wir ergänzen jetzt die Definition der $\chi(\hat{\alpha})$, indem wir

$$\chi(\hat{\alpha}) = 0$$

setzen, falls $\hat{\alpha}$ und $\mathfrak{f}$ nicht teilerfremd sind.

Mit Hilfe der eigentlichen Charaktere bilden wir jetzt gewisse Summen über vollständige Restsysteme einer Klasse idealer Zahlen, die eine Verallgemeinerung der Lagrangeschen Wurzelzahlen vorstellen.

Sei

$$\mathfrak{f} = (\hat{\varphi})$$

und

$$\mathfrak{d} = (\hat{\delta})$$

die Differente des Körpers k. Die Zahlen $\hat{\varphi}, \hat{\delta}$ sind bis auf Einheiten bestimmt und sollen irgendwie fest gewählt werden. Unter $S(\alpha)$ verstehen wir die Spur der Körperzahl α

$$S(\alpha) = \sum_{p=1}^{n} \alpha^{(p)}.$$

Diese ist nach dem Dedekindschen Satze eine ganze rationale Zahl, wenn

$$\alpha \cdot \hat{\delta}$$

ganz. Ist $\hat{\varrho}$ eine ideale ganze Zahl aus der Klasse $\hat{\varphi}\hat{\delta}$, so ist daher

$$e^{2\pi i S\left(\frac{\hat{\varrho}}{\hat{\varphi}\hat{\delta}}\right)}$$

eine Zahl, welche nur von der Restklasse abhängt, der $\hat{\varrho}$ mod $\mathfrak{f}$ angehört.

Es bedeute $\hat{\nu}$ eine beliebige ideale ganze Zahl, $\hat{\varrho}$ durchlaufe ein vollständiges System mod $\mathfrak{f}$ inkongruenter Zahlen aus einer solchen Klasse $\mathfrak{R}$, daß

$$\frac{\hat{\nu}\hat{\varrho}}{\hat{\varphi}\hat{\delta}}$$

eine Körperzahl ist; $\mathfrak{R}$ hängt also von $\hat{\nu}$ ab. Die Summe von $N(\mathfrak{f})$ Gliedern

$$G(\hat{\nu}, \chi) = \sum_{\hat{\varrho}} \chi(\hat{\varrho})\, e^{2\pi i S\left(\frac{\hat{\nu}\hat{\varrho}}{\hat{\varphi}\hat{\delta}}\right)} \tag{10}$$

hängt daher, da $\hat{\varphi}, \hat{\delta}$ als fest gelten, nur von $\hat{\nu}$, χ ab. Sie hat folgende Eigenschaften:

$$G(\hat{\nu}_1, \chi) = G(\hat{\nu}_2, \chi), \tag{11}$$

wenn

$$\hat{\nu}_1 \equiv \hat{\nu}_2 \pmod{\mathfrak{f}}.$$

Wenn

$$(\hat{\alpha}, \mathfrak{f}) = 1,$$

so ist

$$G(\hat{\alpha}\hat{\nu}, \chi) = \bar{\chi}(\hat{\alpha})\, G(\hat{\nu}, \chi). \tag{12}$$

Hier ist $\bar{\chi}$ der konjugiert imaginäre d. h. reziproke Wert von χ, der auch ein Charakter von $\mathfrak{Z}(\mathfrak{f})$ ist.

Es ist nämlich

$$\chi(\hat{\alpha})\, G(\hat{\alpha}\hat{\nu}, \chi) = \sum_{\hat{\varrho}} \chi(\hat{\alpha}\hat{\varrho})\, e^{2\pi i S\left(\frac{\hat{\nu}\hat{\alpha}\hat{\varrho}}{\hat{\varphi}\hat{\delta}}\right)}; \tag{13}$$

$\hat{\varrho}$ durchläuft hier die inkongruenten Zahlen derart, daß

$$\frac{\hat{\nu}\hat{\alpha}\hat{\varrho}}{\hat{\varphi}\hat{\delta}} = \text{Körperzahl}.$$

Also durchläuft

$$\hat{\sigma} = \hat{\alpha}\hat{\varrho}$$

ein System inkongruenter Zahlen, wo

$$\frac{\hat{\nu}\hat{\sigma}}{\hat{\varphi}\hat{\delta}} = \text{Körperzahl}.$$

Die Summe rechts in (13) ist daher wirklich $G(\hat{\nu}, \chi)$.

Ist jetzt $(\hat{\nu}, \mathfrak{f}) = 1$, so bestimme man $\hat{\alpha}$ aus

$$\hat{\alpha}\hat{\nu} \equiv 1 \pmod{\mathfrak{f}}.$$

Daher

$$\chi(\hat{\alpha}) \cdot \chi(\hat{\nu}) = 1,$$

$$G(\hat{\nu}, \chi) = \chi(\hat{\alpha}) G(\hat{\alpha}\hat{\nu}, \chi) = \overline{\chi}(\hat{\nu}) G(1, \chi) = \overline{\chi}(\hat{\nu}) C(\chi \hat{\varphi} \hat{\delta})$$

orin

$$C(\chi, \hat{\varphi}\hat{\delta}) = \sum_{\hat{\varrho}} \chi(\hat{\varrho}) e^{2\pi i S\left(\frac{\hat{\varrho}}{\hat{\varphi}\hat{\delta}}\right)} \qquad \left(\frac{\hat{\varrho}}{\hat{\varphi}\hat{\delta}} = \text{Körperzahl}\right)$$

ur noch von χ, $\hat{\varphi}\hat{\delta}$, aber nicht von $\hat{\nu}$ abhängt.

Ist aber $(\hat{\nu}, \mathfrak{f}) \neq 1$, und χ ein eigentlicher Charakter mod $\mathfrak{f}$, so ist, e gezeigt werden soll,

$$G(\hat{\nu}, \chi) = 0.$$

i nämlich

4) $$(\hat{\nu}, \mathfrak{f}) = \mathfrak{f}_1 \neq 1; \quad \hat{\alpha} \equiv 1 \left(\text{mod } \frac{\mathfrak{f}}{\mathfrak{f}_1}\right), \quad (\hat{\alpha}, \mathfrak{f}) = 1,$$

nn ist

5) $$\hat{\alpha}\hat{\nu} \equiv \hat{\nu} (\text{mod } \mathfrak{f})$$

d wegen (12)

$$G(\hat{\alpha}\hat{\nu}, \chi) = \overline{\chi}(\hat{\alpha}) G(\hat{\nu}, \chi),$$

gen (11)

$$G(\hat{\alpha}\hat{\nu}, \chi) = G(\hat{\nu}, \chi),$$

glich

6) $$G(\hat{\nu}, \chi)(1 - \chi(\hat{\alpha})) = 0,$$

urchläuft $\hat{\alpha}$ alle Zahlen mit der Bedingung (14), so muß mindestens nmal $\chi(\hat{\alpha}) \neq 1$ sein, weil sonst χ einen Charakter mod $\frac{\mathfrak{f}}{\mathfrak{f}_1}$ erzeugen würde, n Widerspruch mit der Voraussetzung, χ sei ein eigentlicher Charakter od $\mathfrak{f}$. Also ist in (16) $G(\hat{\nu}, \chi) = 0$.

Für einen eigentlichen Charakter χ mod $\mathfrak{f}$ *ist daher für alle ganz-hligen* $\hat{\nu}$

7) $$G(\hat{\nu}, \chi) = \overline{\chi}(\hat{\nu}) C(\chi, \hat{\varphi}\hat{\delta}).$$

t ferner

$$\lambda((\hat{\mu})) = \lambda(\hat{\mu}) \chi(\hat{\mu}) v(\hat{\mu})$$

n Charakter des Ideals $(\hat{\mu})$, also für jede Einheit ε

$$\lambda(\varepsilon) \chi(\varepsilon) v(\varepsilon) = 1,$$

folgt sogleich, daß

8) $$\lambda(\hat{\varphi}\hat{\delta}) v(\hat{\varphi}\hat{\delta}) C(\chi, \hat{\varphi}\hat{\delta})$$

ur von χ und dem Ideal $(\hat{\varphi}) = \mathfrak{f}$, dagegen nicht von $\hat{\varphi}$ selbst abhängt.

Die Unterscheidung zwischen eigentlichen und uneigentlichen Charak-ren χ überträgt sich auf die Größencharaktere λ. Sei

$$\lambda((\hat{\mu})) = \lambda(\hat{\mu}) \chi(\hat{\mu}) v(\hat{\mu})$$

n Größencharakter mod $\mathfrak{f}$. Das hierin auftretende χ ist ein Charakter

mod $\mathfrak{f}$. Wenn χ ein eigentlicher (bzw. uneigentlicher) Charakter mod $\mathfrak{f}$ ist, heiße auch λ ein ebensolcher Charakter mod $\mathfrak{f}$.

Sei nun χ ein uneigentlicher Charakter mod $\mathfrak{f}$, aber ein eigentlicher mod $\mathfrak{f}_1$, wo dann $\mathfrak{f}_1$ in $\mathfrak{f}$ aufgeht. Dann ist λ bereits ein Größencharakter mod $\mathfrak{f}_1$. Denn ist η irgend eine Einheit mod $\mathfrak{f}_1$ (§ 1), so ist

$$v(\eta) = 1,$$
$$\chi(\eta) = 1,$$

also

$$1 = \lambda((1)) = \lambda(\eta),$$

daher hat $\lambda(x)$ die Eigenschaft

$$\lambda(\eta x) = \lambda(x)$$

für jede Einheit η mod $\mathfrak{f}_1$ und ist nach § 1 also ein Größencharakter mod $\mathfrak{f}$. Es gibt also einen eigentlichen Größencharakter $\lambda_1((\hat{\mu}))$ mod $\mathfrak{f}_1$, derart, daß

$$\lambda_1((\hat{\mu})) = \lambda((\hat{\mu}))$$

für alle zu $\mathfrak{f}$ primen $\hat{\mu}$.

§ 5.

Eine Thetaformel.

Eine früher von mir bewiesene Thetaformel soll jetzt erheblich verallgemeinert und unter Benutzung der idealen Zahlen vereinfacht dargestellt werden. An der zitierten Stelle bewies ich folgende Formel:

$$(19)\quad \sum_{\mu} \exp\left\{ -\pi \sum_{p=1}^{n} |\mu^{(p)} + u^{(p)}|^2 t_p \right\}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{d\, N^2(\mathfrak{a})\, t_1 t_2 \dots t_n}} \sum_{\nu} \exp\left\{ -\pi \sum_{p=1}^{n} |\nu^{(p)}|^2 \frac{1}{t_p} + 2\pi i \sum_{p=1}^{n} \nu^{(p)} u^{(p)} \right.$$

Hierin haben die Zeichen folgende Bedeutung:

$$t_1, t_2, \dots, t_n > 0, \quad t_{p+r_2} = t_p, \quad (p = r_1 + 1, \dots, r_1 + r$$

d ist der Betrag der Körperdiskriminante,

μ durchläuft alle Zahlen des Ideals $\mathfrak{a}$,

ν diejenigen des Ideals $\frac{1}{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}$,

$$u^{(p)} = \sum_{q=1}^{n} \alpha_q^{(p)} x_q,$$

$x_1, \dots, x_n$ reelle Veränderliche,

$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ eine Basis von $\mathfrak{a}$.

hreiben wir

$$0) \quad \sum_{p=1}^{r_1} (\mu^{(p)} + u^{(p)})^2 t_p + 2 \sum_{p=r_1+1}^{r_1+r_2} (\mu^{(p)} + u^{(p)})(u^{(p+r_2)} + \mu^{(p+r_2)}) t_p$$

Stelle von

$$\sum_{p+1}^{n} |\mu^{(p)} + u^{(p)}|^2 t_p,$$

gilt die entsprechende Formel als analytische Formel natürlich für eliebige komplexe Werte der unabhängigen Veränderlichen $u^{(1)}, u^{(2)}, \ldots, u^{(n)}$.

Wir setzen jetzt, unter ϱ eine beliebige Körperzahl verstanden, in (19)

$$u^{(p)} = v_p + \varrho^{(p)}, \qquad (p = 1, 2, \ldots, n)$$

o die v wieder neue Variable sind, und erhalten für (20)

$$1) \quad \sum_{p=1}^{n} |\mu^{(p)} + \varrho^{(p)}|^2 t_p + 2 \sum_{p=1}^{n} v_p t_p (\bar{\mu}^{(p)} + \bar{\varrho}^{(p)}) + \sum_{p=1}^{r_1} v_p^2 t_p + 2 \sum_{p=r_1+1}^{r_1+r_2} v_p v_{p+r_2} t_p.$$

dann verstehen wir wie früher unter

$$a_1, a_2, \ldots, a_n$$

s Exponentensystem eines Größencharakters $\lambda((\hat{\mu}))$ mod $\mathfrak{f}$, und unter

$$a_1', a_2', \ldots, a_n'$$

s des reziproken $\bar{\lambda}((\hat{\mu}))$. Die a, a' sind nicht negative ganze Zahlen. ir spezialisieren jetzt in (21) die v, indem wir setzen

$$v_p = 0, \quad \text{wenn} \quad a_p' = 0.$$

adurch fällt der letzte Term im Exponenten jedenfalls weg. Die sich aus (19) ergebende Formel differentiieren wir alsdann

$$a_1'\text{-}, a_2'\text{-}, \ldots, a_n'\text{-mal}$$

sp. nach den Variablen $v_1, v_2, \ldots, v_n$ und setzen hernach alle $v_p = 0$.

So kommt

$$2) \quad \begin{cases} \prod_{p=1}^{n} (-2\pi t_p)^{a_p'} \sum_{\mu} \prod_{p=1}^{n} (\bar{\mu}^{(p)} + \bar{\varrho}^{(p)})^{a_p'} \exp\{-\pi \sum_{p=1}^{n} |\mu^{(p)} + \varrho^{(p)}|^2 t_p\} \\ = \dfrac{\prod_{p=1}^{n} (2\pi i)^{a_p'}}{\sqrt{d N^2(\mathfrak{a}) t_1 \ldots t_n}} \sum_{\nu} \prod_{p=1}^{n} (\nu^{(p)})^{a_p'} \exp\{-\pi \sum_{p=1}^{n} |\nu^{(p)}|^2 \frac{1}{t_p} + 2\pi i S(\nu\varrho)\}. \end{cases}$$

uf der linken Seite können wir hier noch ersetzen

$$\prod_{p=1}^{n} (-2\pi t_p)^{a_p'} = \prod_{p=1}^{n} (-2\pi t_p)^{a_p},$$

$$\prod_{p=1}^{n} (\bar{\mu}^{(p)} + \bar{\varrho}^{(p)})^{a_p'} = \prod_{p=1}^{n} (\mu^{(p)} + \varrho^{(p)})^{a_p}.$$

Unter Heranziehung der idealen Zahlen aus $\mathfrak{Z}$ werde endlich diese Gleichung umgeformt. Sei wie im § 4

$$\mathfrak{f} = (\hat{\varphi}), \quad \mathfrak{d} = (\hat{\delta}), \quad \mathfrak{a} = (\hat{\alpha}),$$

also

$$|N(\hat{\varphi})| = N(\mathfrak{f}), \quad |N(\hat{\delta})| = N(\mathfrak{d}) = d, \quad |N(\hat{\alpha})| = N(\mathfrak{a}).$$

Ferner nehmen wir

$$\varrho = \frac{\hat{\varrho}\,\hat{\alpha}}{\hat{\varphi}},$$

wo die ganze Zahl $\hat{\varrho}$ der Klasse $\frac{\hat{\varphi}}{\hat{\alpha}}$ angehört, und setzen

$$\mu + \varrho = \frac{\hat{\mu}\,\hat{\alpha}}{\hat{\varphi}}, \quad \nu = \frac{\hat{\nu}}{\hat{\alpha}\,\hat{\delta}}.$$

Es durchläuft dann $\hat{\mu}$ alle ganzen Zahlen der Klasse $\frac{\hat{\varphi}}{\hat{\alpha}}$, welche $\equiv \hat{\varrho} \pmod{\mathfrak{f}}$, $\hat{\nu}$ alle ganzen Zahlen der Klasse $\hat{\alpha}\,\hat{\delta}$.

Endlich nehmen wir

$$\frac{t_p}{|\hat{\alpha}^{(p)}|^2}\left|\frac{\hat{\varphi}^{(p)}}{\hat{\delta}^{(p)}}\right| \text{ an Stelle von } t_p \qquad (p = 1, 2, \ldots, n$$

Aus der Gleichung (22) wird so die folgende:

$$(23)\quad \begin{cases} v^n(\hat{\alpha}\,\hat{\delta}) \prod_{p=1}^{n}\left(\frac{\hat{\varphi}^{(p)}\hat{\eta}^{(p)}}{|\hat{\varphi}^{(p)}\hat{\delta}^{(p)}|}\right)^{-a_p} \sum_{\hat{\mu} \equiv \hat{\varrho}\,(\mathfrak{f})} \prod_{p=1}^{n} (\hat{\mu}^{(p)})^{a_p} \exp\left\{-\pi \sum_{p=1}^{n} \frac{|\hat{\mu}^{(p)}|^2}{|\hat{\varphi}^{(p)}\hat{\delta}^{(p)}|} t_p\right\} \\ = \frac{(-i)^{\Sigma a_p}}{\sqrt{N(\mathfrak{f})}} \prod_{p=1}^{n} t_p^{-\frac{1}{2}-a_p} \sum_{\hat{\nu}} \prod_{p=1}^{n} (\hat{\nu}^{(p)})^{a_p'} \exp\left\{-\pi \sum_{p=1}^{n} \frac{|\hat{\nu}^{(p)}|^2}{|\hat{\varphi}^{(p)}\hat{\delta}^{(p)}|} \frac{1}{t_p} + 2\pi i S\left(\frac{\hat{\nu}\hat{\varrho}}{\hat{\varphi}}\right.\right. \end{cases}$$

Hieraus endlich folgt die in Aussicht genommene Thetaformel. Es sei $\lambda((\hat{\mu}))$ ein *eigentlicher* Größencharakter mod $\hat{\varphi}$, wozu nach § 3 eindeutig ein χ, v gehört:

$$\lambda((\hat{\mu})) = \lambda(\hat{\mu})\chi(\hat{\mu})v(\hat{\mu}),$$

und $a_1, a_2, \ldots, a_n$ die nach § 3 dazugehörigen Exponenten. Die Zerlegung des reziproken Charakters ist nach (9)

$$\bar{\lambda}((\hat{\mu})) = \bar{\lambda}(\hat{\mu})\frac{\bar{\chi}(\hat{\mu})}{v^2(\hat{\mu})} \cdot v(\hat{\mu}).$$

Es werde gesetzt

$$(24)\quad \vartheta(t; \mathfrak{R}, \lambda, \hat{\varphi}\,\hat{\delta}) = \sum_{\hat{\mu}\,\mathrm{in}\,\mathfrak{R}} \chi(\hat{\mu}) \prod_{p=1}^{n}\left(\frac{\hat{\mu}^{(p)}}{|\sqrt{\hat{\varphi}^{(p)}\hat{\delta}^{(p)}}|}\right)^{a_p} \exp\left\{-\pi \sum_{p=1}^{n} \frac{|\hat{\mu}^{(p)}|^2}{|\hat{\varphi}^{(p)}\hat{\delta}^{(p)}|} t_p\right.$$

Darin soll $\hat{\mu}$ alle ganzen Zahlen der Klasse $\mathfrak{R}$ von $\mathfrak{Z}(1)$ durchlaufen. Multiplizieren wir (23) mit $\chi(\hat{\varrho}) = \chi(\hat{\mu})$ und summieren über alle in kongruenten Zahlen $\hat{\varrho}$ von $\mathfrak{R}$, wenden auf der rechten Seite die Gleichung (17) an und bedenken, daß für jede Körperzahl ν

$$v^2(\nu) = 1,$$

also $v^2(\hat{\nu}) = v^2(\hat{\alpha}\hat{\delta})$ für jedes $\hat{\nu}$ der rechten Seite,

ergibt sich

$$\vartheta(t; \mathfrak{R}, \lambda, \hat{\varphi}\hat{\delta}) = H(\lambda, \hat{\varphi}\hat{\delta}) \prod_{p=1}^{n} t_p^{-\frac{1}{2}-a_p} \vartheta\left(\frac{1}{t}; \mathfrak{R}', \bar{\lambda}, \hat{\varphi}\hat{\delta}\right). \quad 5)$$

abei ist

$\mathfrak{R}\mathfrak{R}'$ die Klasse von $\hat{\varphi}\hat{\delta}$,

$$H(\lambda, \hat{\varphi}\hat{\delta}) = (-i)^{\Sigma a_p} \frac{C\ \chi, \hat{\varphi}\hat{\delta})}{\sqrt{N(\mathfrak{f})}} \prod_{p=1}^{n} \left(\frac{\hat{\varphi}^{(p)}\hat{\delta}^{(p)}}{|\hat{\varphi}^{(p)}\hat{\delta}^{(p)}|}\right)^{a_p}.$$

erücksichtigen wir, daß nach § 1 und 3

$$\prod_{p=1}^{n} \left(\frac{\hat{\alpha}^{(p)}}{|\hat{\alpha}^{(p)}|}\right)^{a_p} = \frac{\lambda(\hat{\alpha})}{\lambda(|\hat{\alpha}|)} \frac{v(\hat{\alpha})}{v(|\hat{\alpha}|)},$$

ist

$$H(\lambda, \hat{\varphi}\hat{\delta}) = (-i)^{\Sigma a_p} \frac{\lambda(\hat{\varphi}\hat{\delta})\, v(\hat{\varphi}\hat{\delta})\, C(\chi, \hat{\varphi}\hat{\delta})}{\lambda(|\hat{\varphi}\hat{\delta}|)\sqrt{N(\mathfrak{f})}},$$

d das Produkt

$$W(\lambda) = (-i)^{\Sigma a_p} \frac{\lambda(\hat{\varphi}\hat{\delta})\, v(\hat{\varphi}\hat{\delta})}{\sqrt{N(\mathfrak{f})}} \sum_{\hat{\varrho}} \chi(\hat{\varrho})\, e^{2\pi i S\left(\frac{\hat{\varrho}}{\hat{\varphi}\hat{\delta}}\right)}$$

dann nach (18) nur von λ, nicht von λ und $\hat{\varphi}\hat{\delta}$ abhängig. Die rmel (25) geht daher in folgende über:

$$\vartheta(t; \mathfrak{R}, \lambda, \hat{\varphi}\hat{\delta}) = \frac{W(\lambda)}{\lambda(|\hat{\varphi}\hat{\delta}|)} \prod_{p=1}^{n} t_p^{-\frac{1}{2}-a_p} \vartheta\left(\frac{1}{t}; \mathfrak{R}', \bar{\lambda}, \hat{\varphi}\hat{\delta}\right). \quad 6)$$

läßt sich zeigen, daß von diesen Funktionen ϑ keine identisch in t rschwindet. Also ist auch $W(\lambda) \neq 0$ und

$$W(\lambda)\, W(\bar{\lambda}) = 1. \quad 7)$$

ıdrerseits ist die konjugiert imaginäre Größe zu $W(\lambda)$

$$\overline{W(\lambda)} = (-i)^{-\Sigma a_p} \frac{\bar{\lambda}(\hat{\varphi}\hat{\delta})\, \bar{v}(\hat{\varphi}\hat{\delta})}{\sqrt{N(\mathfrak{f})}} \sum_{\hat{\varrho}} \bar{\chi}(\hat{\varrho})\, e^{-2\pi i S\left(\frac{\hat{\varrho}}{\hat{\varphi}\hat{\delta}}\right)}$$

$$= \chi(-1)(-1)^{\Sigma a_p} W(\bar{\lambda}) = \lambda(-1)\chi(-1)v(-1)\, W(\bar{\lambda}) = W(\bar{\lambda}).$$

us (27) folgt daher

$$|W(\lambda)| = 1. \quad 8)$$

e Gleichung (27) und damit (28) werden wir später aus dem Nicht-rschwinden der Funktionen $\zeta(s; \lambda)$ folgern, ohne zu benutzen, daß die Reihen nicht identisch verschwinden.

Aus (26) und der konjugiert imaginären Formel ergibt sich noch, da die Reihe der absoluten Beträge, wenn die t gegen Null konvergieren,

$$< M \prod_{p=1}^{n} t_p^{-\frac{1}{2}-a_p},$$

wo M von den t unabhängig ist.

§ 6.

Zetafunktionen mit Größencharakteren und ihre Funktionalgleichung

Sei $\lambda((\hat{\alpha}))$ ein Größencharakter des Ideals $(\hat{\alpha})$ mod $\mathfrak{f}$. Durch

$$\zeta(s,\lambda) = \sum_{\hat{\alpha}}{}' \frac{\lambda((\hat{\alpha}))}{|N(\hat{\alpha})|^s}, \tag{29}$$

summiert über alle ganzen nicht assoziierten idealen Zahlen $\hat{\alpha}$, ist, wenn der reelle Teil der komplexen Variablen $s > 1$ ist, eine analytische Funktion von s definiert, welche wegen der Produktregel für λ auch die Produktdarstellung

$$\zeta(s,\lambda) = \prod_{\hat{\pi}} \frac{1}{1-\lambda((\hat{\pi}))\,|N(\hat{\pi})|^{-s}} \tag{30}$$

gestattet, wobei $(\hat{\pi})$ sämtliche verschiedenen Primideale in $\mathfrak{Z}$ durchläuft.

Ist λ ein uneigentlicher Charakter nach $\mathfrak{f}$, so erzeugt nach § 5 einen eigentlichen Charakter λ' nach einem Teiler $\mathfrak{f}_1$ von $\mathfrak{f}$. λ und λ' unterscheiden sich nur für solche Ideale, die zu $\mathfrak{f}_1$, aber nicht zu $\mathfrak{f}$ prim sind. Offenbar ist

$$\zeta(s,\lambda) = \zeta(s,\lambda') \prod_{(\hat{\pi})/\mathfrak{f}} (1-\lambda'((\hat{\pi}))\,|N(\hat{\pi})|^{-s}), \tag{31}$$

wo das Produkt über die endlich vielen Primfaktoren $(\hat{\pi})$ von $\mathfrak{f}$ zu erstrecken ist.

Wir beschränken uns daher im folgenden auf *eigentliche* Charaktere λ und wollen jetzt die entsprechenden $\zeta(s,\lambda)$ in die ganze komplexe s-Ebene fortsetzen und ihre Funktionalgleichung aufstellen.

Zunächst ist nach (8)

$$\lambda((\hat{\mu})) = \lambda(\hat{\mu})\chi(\hat{\mu})v(\hat{\mu})$$

und nach § 1

$$\begin{cases} \lambda(y)\,v(y) = \prod_{p=1}^{r+1} |y_p|^{\sum_{q=1}^{r} e_p^{(q)}(2\pi i m_q - i\sum_{k=r_1+1}^{n} a_k \vartheta_q^{(k)})} \prod_{p=1}^{n} \left(\frac{y_p}{|y_p|}\right)^{a_p}, \\ \frac{\lambda(y)\,v(y)}{|N(y)|^s} = \prod_{p=1}^{n} (y_p)^{a_p} \prod_{p=1}^{r+1} |y_p|^{-z_p}, \end{cases} \tag{32}$$

$$z_p = e_p\left(s + \frac{a_p + a_p'}{2}\right) - \sum_{q=1}^{r} e_p^{(q)}(2\pi i m_q - i\sum_{k=1}^{w} a_k \vartheta_q^{(k)}).$$

Umformung des zweiten Produktes in (32) benutzen wir die Formel

$$\Gamma\left(\frac{z_p}{2}\right)|y_p|^{-z_p} = \int_0^\infty e^{-t_p|y_p|^2} t_p^{\frac{z_p}{2}-1} dt_p.$$

ergibt sich

$$\prod_{p=1}^{r+1} \Gamma\left(\frac{z_p}{2}\right)|y_p|^{-z_p} = \int_0^\infty \cdots \int e^{-\sum_{p=1}^{r+1}|y_p|^2 t_p} \prod_{p=1}^{r+1} t_p^{\frac{z_p}{2}} \frac{dt_1 \ldots dt_{r+1}}{t_1 \ldots t_{r+1}}.$$

diesem $(r+1)$-fachen Integral führen wir neue Veränderliche $u, x_1, \ldots, x_r$ ch die Gleichungen ein

$$t_p = u e^{2\sum_{q=1}^{r} x_q \log|\eta_q^{(p)}|}, \qquad (p = 1, \ldots, r+1)$$

in die η wie bisher ein System von Grundeinheiten mod $\mathfrak{f}$ bedeuten. Funktionaldeterminante der t nach den u, x ist

$$\frac{t_1 \cdot t_2 \cdots t_{r+1}}{u} 2^{r_1 - 1} n R(\mathfrak{f}),$$

in $R(\mathfrak{f})$ der Regulator der Einheiten η ist. Ferner wird

$$\prod_{p=1}^{r+1} t_p^{\frac{z_p}{2}} = u^{\frac{1}{2}\sum_{p=1}^{r+1} z_p} \exp\left\{\sum_{q=1}^{r} x_q \sum_{p=1}^{r+1} z_p \log|\eta_q^{(p)}|\right\}.$$

gen des Zusammenhanges zwischen dem System $e_p^{(q)}$ und $\log|\eta_q^{(p)}|$ nach ist

$$\exp\left\{\sum_{q=1}^{r} x_q \sum_{p=1}^{r+1} z_p \log|\eta_q^{(p)}|\right\}$$

$$= \exp\left\{\sum_{q=1}^{r} x_q[-2\pi i m_q + \sum_{p=1}^{n} a_p(\log|\eta_q^{(p)}| + i\vartheta_q^{(p)})]\right\}$$

$$u^{\frac{1}{2}\sum_{p=1}^{r+1} z_p} = u^{\frac{ns}{2} + \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{n} a_p}.$$

dieser Weise ergibt sich für das einzelne Glied unserer ζ-Reihe, indem in (33)

$$y_p = \frac{\hat{\mu}^{(p)}}{|\sqrt{\hat{\varphi}^{(p)}\hat{\delta}^{(p)}}|}\sqrt{e_p \pi} \qquad (p = 1, \ldots, n)$$

etzen,

$$(36)\quad \left\{\begin{aligned} \prod_{p=1}^{n} y_p^{a_p} \prod_{p=1}^{r+1} |y_p|^{-z_p} &= \prod_{p=1}^{n} |\sqrt{e_p \pi}|^{a_p} \prod_{p=1}^{r+1} |\sqrt{e_p \pi}|^{-z_p} \cdot \frac{\lambda\left(\frac{\hat\mu}{|\sqrt{\hat\varphi\hat\delta}|}\right) v\left(\frac{}{|\sqrt{}}\right.}{\left|N\left(\frac{\hat\mu}{|\sqrt{\hat\varphi\hat\delta}|}\right)\right.} \\ &= \gamma(\lambda) A^s \frac{\lambda(\hat\mu)\, r(\hat\mu)}{|N(\hat\mu)|^s} \cdot \bar\lambda(|\sqrt{\hat\varphi\hat\delta}|) \end{aligned}\right.$$

mit

$$\gamma(\lambda) = \prod_{p=1}^{r+1} |\sqrt{e_p}|^{\sum_{q=1}^{r} e_p^{(q)}(2\pi i m_q - i \sum_{k=1}^{n} a_k \vartheta_q^{(k)})},$$

$$A = \left|\sqrt{\frac{dN(\mathfrak{f})}{\pi^n}}\right| 2^{-r_2}.$$

Endlich sei

$$\Gamma(s,\lambda) = \prod_{p=1}^{r+1} \Gamma\left(\frac{z_p}{2}\right) = \prod_{p=1}^{r+1} \Gamma\left[\frac{e_p}{2}\left(s + \frac{a_p + a_p'}{2}\right) - \sum_{q=1}^{r} e_p^{(q)}(\pi i m_q - \frac{i}{2}\sum_{k=1}^{n} a_k \vartheta_q^{(k)}\right.$$

Aus (32), (33), (36) folgt

$$\Gamma(s,\lambda)\gamma(\lambda) A^s \frac{\lambda(\hat\mu)\, v(\hat\mu)}{|N(\hat\mu)|^s} \bar\lambda(|\sqrt{\hat\varphi\hat\delta}|) = \prod_{p=1}^{n}\left(\frac{\hat\mu^{(p)}}{|\sqrt{\hat\varphi^{(p)}\hat\delta^{(p)}}|}\right)^{a_p} \prod_{p=1}^{r+1} |y_p|^{-z_p} \cdot \Gamma(s,\lambda$$

$$= 2^{r_1-1} n R(\mathfrak{f}) \int_{u=0}^{\infty} \int_{x_q=-\infty}^{+\infty} \dots \int F(u, \hat\mu, x_1, \dots, x_r)\, u^{\frac{ns}{2} + \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{n} a_p} \frac{du}{u}\, dX$$

mit

$$dX = dx_1\, dx_2 \dots dx_r,$$

$F(u, \hat\mu, x_1, \dots, x_r)$

$$= \prod_{p=1}^{n}\left(\frac{\hat\mu^{(p)}}{|\sqrt{\hat\varphi^{(p)}\hat\delta^{(p)}}|}\right)^{a_p} \cdot \exp\{-\pi \sum_{p=1}^{n} t_p |\hat\mu^{(p)}|^2 - \sum_{q=1}^{r} x_q [2\pi i m_q - \sum_{p=1}^{n} a_p (\log|\eta_q^{(p)}| +$$

Diese Funktion hat die Eigenschaft:

(37) $F(u, \hat\mu, x_1, \dots, x_l + 1, x_{l+1}, \dots, x_r) = F(u, \eta_l \hat\mu, x_1, \dots, x_r)$, $(l = 1, \dots,$

und, wenn ξ eine beliebige der $w(\mathfrak{f})$ Einheitswurzeln mod $\mathfrak{f}$ ist, überdi
nach (2)

(38) $$F(u, \xi\hat\mu, x_1, \dots, x_r) = F(u, \hat\mu, x_1, \dots, x_r).$$

Daher ist, wenn η die sämtlichen Einheiten mod $\mathfrak{f}$ durchläuft,

$$\int_{x_q=-\infty}^{+\infty} \dots \int F\, dX = \frac{1}{w(\mathfrak{f})} \sum_{\eta} \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \dots \int F(\eta\hat\mu, x_1, \dots, x_r)\, dX$$

$$= \frac{1}{w(\mathfrak{f})} \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \dots \int \sum_{\eta} F(\eta\hat\mu, x_1, \dots, x_r)\, dX,$$

a die Reihe (als Bestandteil der Thetareihe) für $u > 0$ im Bereiche $x_q| \leqq \frac{1}{2}$ gleichmäßig in x konvergiert. Ist schließlich

$$\varepsilon_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, e(\mathfrak{f}))$$

in solches System von Einheiten des Körpers, daß

$$\varepsilon_i \eta, \qquad (i = 1, 2, \ldots, e(\mathfrak{f}))$$

vo η alle Einheiten mod $\mathfrak{f}$ durchläuft, jede Einheit des Körpers genau inmal darstellt, so ist

$$\frac{\lambda(\hat{\mu})\, v(\hat{\mu})\, \chi(\hat{\mu})}{|N(\hat{\mu})|^s} = \frac{1}{e(\mathfrak{f})} \sum_{i=1}^{e(\mathfrak{f})} \frac{\lambda(\varepsilon_i \hat{\mu})\, v(\varepsilon_i \hat{\mu})\, \chi(\varepsilon_i \hat{\mu})}{|N(\varepsilon_i \hat{\mu}|^s}$$

nd folglich

$$39) \qquad \gamma(\lambda)\, \Gamma(s, \lambda)\, A^s \frac{\lambda((\hat{\mu}))}{|N(\hat{\mu})|^s}\, \bar{\lambda}(|\sqrt{\hat{\varphi}\hat{\delta}}|)$$

$$= \frac{2^{r_1 - 1} n R(\mathfrak{f})}{w(\mathfrak{f}) e(\mathfrak{f})} \int_{u=0}^{\infty} \int_{x_q = -\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \cdots \int \sum_{\varepsilon} F(\varepsilon \hat{\mu}, x_1, \ldots, x_r)\, u^{\frac{ns}{2} + \frac{1}{2} \Sigma a_p}\, \chi(\varepsilon \mu) \frac{du}{u} dX,$$

orin ε sämtliche Einheiten des Körpers durchläuft. Den Faktor vor den ntegralzeichen nennen wir

$$M(\mathfrak{f}) = \frac{2^{r_1 - 1} n R(\mathfrak{f})}{w(\mathfrak{f}) e(\mathfrak{f})}.$$

Summieren wir endlich über alle verschiedenen Ideale $(\hat{\mu})$ einer lasse $\mathfrak{R}$, vertauschen rechts diese Summation mit den Integrationen, so halten wir rechts unsere Thetareihe (24) ohne das Glied mit $\hat{\mu} = 0$. ie Vertauschung rechtfertigt sich leicht, da auf Grund der Bemerkung n Schlusse von § 5 die Reihe

$$\sum_{(\hat{\mu})} \sum_{\varepsilon} F u^{\frac{ns}{2} + \frac{1}{2} \Sigma a_p}$$

ne für alle $u \geqq 0$ gleichmäßig konvergente Majorante hat, wenn $\Re(s) > 1$, e im Unendlichen auch noch hinreichend stark verschwindet.

Wir haben nun angenommen, daß $\lambda((\hat{\mu}))$ ein *eigentlicher* Charakter od $\mathfrak{f}$ ist. Ist $\mathfrak{f} \neq 1$, so fällt in der Thetareihe das Glied mit $\hat{\mu} = 0$ egen des Faktors $\chi(\hat{\mu}_l)$ von selbst heraus. Ist $\mathfrak{f} = 1$, so bleibt das Glied nn und nur dann stehen, wenn alle Exponenten m_q und a_p gleich Null nd; in diesem Falle ist λ kein echter Größencharakter, sondern ein assencharakter von $\mathfrak{Z}(1)$ und diese $\zeta(s, \lambda)$ sind von mir bereits früher[2]) llständig erledigt.

[2]) Vgl. meine Noten in den Göttinger Nachrichten 1917, ebenso die folgende merkung.

Wir nehmen also an, daß dieser besondere Fall nicht vorliegt, d. h. $\mathfrak{f} \neq 1$, oder, wenn $\mathfrak{f} = 1$, mindestens ein m_q oder a_p von Null verschieden ist. Setzen wir

$$(40)\quad \zeta(s;\lambda,\mathfrak{K}) = \sum_{\hat{\mu}\ \mathrm{in}\ \mathfrak{K}} \frac{\lambda((\hat{\mu}))}{|N(\hat{\mu})|^s}, \qquad \xi(s;\lambda,\mathfrak{K}) = \gamma(\lambda)\Gamma(s;\lambda)A^s\zeta(s;\lambda,\mathfrak{K}),$$

so erhalten wir folgende Darstellung von ξ durch die Thetareihe:

$$(41)\quad \xi(s;\lambda,\mathfrak{K})\bar{\lambda}(|\sqrt{\hat{\varphi}\hat{\delta}}|) =$$

$$M(\mathfrak{f})\int_{u=0}^{\infty}\int_{x_q=-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}}\cdots\int \vartheta(t,\mathfrak{K},\lambda,\hat{\varphi}\hat{\delta})\,u^{\frac{ns}{2}+\frac{1}{2}\Sigma a_p}\exp\Big\{-\sum_{q=1}^{r}x_q\Big[2\pi i m_q-\sum_{p=1}^{n}a_p(\log|\eta_q^{(p)}|+i\vartheta_q^{(p)})\Big]$$

Wir teilen das Integral über u in ein solches von $u = 0$ bis 1 und eines von $u = 1$ bis ∞, führen im ersteren $\frac{1}{u}$, $-x_1, \ldots, -x_r$ als neue Variable ein, wenden die Transformationsformel für ϑ (26) an und erhalten nach einer kleinen Rechnung

$$(42)\quad \xi(s;\lambda,\mathfrak{K}) = \lambda(|\sqrt{\hat{\varphi}\hat{\delta}}|)g(s;\lambda,\mathfrak{K}) + W(\lambda)\bar{\lambda}(|\sqrt{\hat{\varphi}\hat{\delta}}|)g(1-s;\bar{\lambda},\mathfrak{K}'),$$

worin gesetzt ist

$$(43)\quad \frac{g(s;\lambda,\mathfrak{K})}{M(\mathfrak{f})} =$$

$$\int_{u=1}^{\infty}\int_{x_q=-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}}\cdots\int \vartheta(t;\mathfrak{K},\lambda,\hat{\varphi}\hat{\delta})\,u^{\frac{ns}{2}+\frac{1}{2}\Sigma a_p}\exp\Big\{-\sum_{q=1}^{r}x_q\Big[2\pi i m_q-\sum_{p=1}^{n}a_p(\log|\eta_p^{(p)}|+i\vartheta_q^{(p)})\Big]$$

Dieses g ist offenbar eine ganze Funktion von s; daher ist ξ und also ebenfalls eine ganze Funktion von s. Sodann aber ergibt sich aus (42) die ***Funktionalgleichung***

$$(44)\quad \xi(1-s;\bar{\lambda},\mathfrak{K}') = W(\bar{\lambda})\xi(s;\bar{\lambda},\mathfrak{K}),\quad \mathfrak{K}\cdot\mathfrak{K}' \text{ die Klasse von } (\hat{\varphi}\hat{\delta}) = \mathfrak{f}\mathfrak{d}.$$

Ist nämlich die Thetareihe in (43) nicht identisch Null, so ist nach § 4 $W(\lambda)W(\bar{\lambda}) = 1$. Ist sie aber Null, so ist auch die transformierte Thetareihe, also auch g identisch Null, also beide Seiten in (44) identisch in s gleich Null.

Summieren wir endlich die Gleichungen (44) über alle Klassen $\mathfrak{K}$, wobei dann auch $\mathfrak{K}'$ alle Klassen durchläuft, so ergibt sich, wenn wir das schon bekannte Resultat (bei $\lambda(\hat{\mu}) = 1$) hinzunehmen, der folgende Hauptsatz[3]):

Die Funktion

$$\xi(s;\lambda) = \gamma(\lambda)\Gamma(s;\lambda)A^s\zeta(s;\lambda)$$

[3]) Für den Fall, daß λ ein Charakter χ_0 von $\mathfrak{Z}_0(\mathfrak{f})$ ist, findet sich die Rechnung schon durchgeführt bei Landau, Über Ideale und Primideale in Idealklassen. (Diese Zeitschrift Bd. II (1918), S. 52–154.)

t eine ganze Funktion von s für jeden Charakter

$$\lambda((\hat{\mu})) = \lambda(\hat{\mu})\chi(\hat{\mu})v(\hat{\mu}),$$

o nicht gleichzeitig

$$\lambda(\hat{\mu})v(\hat{\mu}) \equiv 1, \chi \text{ der Hauptcharakter mod } \mathfrak{f}.$$

Ist χ überdies ein eigentlicher Restklassencharakter mod. $\mathfrak{f}$, *so genügt der Funktionalgleichung*

5)
$$\begin{cases} \xi(1-s;\bar{\lambda}) = W(\bar{\lambda})\xi(s;\lambda), \\ W(\lambda) = \dfrac{(-i)^{\Sigma a_p}}{\sqrt{N(\mathfrak{f})}} \lambda(\hat{\varphi}\hat{\delta})v(\hat{\varphi}\hat{\delta}) \sum_{\hat{\varrho}} \chi(\hat{\varrho}) e^{2\pi i S\left(\frac{\hat{\varrho}}{\hat{\varphi}\hat{\delta}}\right)}. \end{cases}$$

die Funktion ξ, wie aus der Produktdarstellung folgt, nicht identisch rschwindet, so ist $W(\lambda) \neq 0$, und da nach § 4

$$W(\lambda) \text{ konjugiert imaginär zu } W(\bar{\lambda}),$$

folgt aus (45)

$$|W(\lambda)| = 1.$$

§ 7.

Die asymptotische Verteilung der Charaktere für Primideale.

Auf Grund der Ergebnisse des vorigen Paragraphen läßt sich nun auf e Funktionen $\zeta(s;\lambda)$ die ganze Theorie fast wörtlich übertragen, welche n Herrn Landau für die Dedekindsche Funktion $\zeta_K(s)$ sowie für die t *Klassencharakteren* gebildeten $\zeta(s;\chi) = L(s,\chi)$ entwickelt worden . Eine ausführliche Darstellung findet sich in seiner Schrift *Einführung die elementare und analytische Theorie der algebraischen Zahlen und r Ideale* (bei Teubner, 1918) sowie in der Anm.[3]) genannten Abhandlung.

Ich beschränke mich hier darauf, das Schlußresultat anzuführen, lches die Anwendung seiner Methoden auf meine $\zeta(s;\lambda)$ in der uns eressierenden Richtung liefert:

$\lambda((\hat{\mu}))$ sei ein beliebiger Klassen- oder Größencharakter der Ideale $\hat{\mu}$, r nicht der Hauptcharakter. Dann gilt

6)
$$\sum_{N(\mathfrak{p})<x} \lambda((\mathfrak{p})) = O(xe^{-c\sqrt{\log x}}).$$

erin ist die Summe über die verschiedenen Primideale $\mathfrak{p}$ zu erstrecken, ren Norm kleiner als x ist; c bedeutet eine positive nur vom Charakter bhängige Konstante. Für den Hauptcharakter ist, wie schon bekannt,

7)
$$\pi(x) = \sum_{N(\mathfrak{p})<x} 1 = \int_2^x \frac{du}{\log u} + O(xe^{-c\sqrt{\log x}}).$$

Es ist nun meine Absicht, in diesem Paragraphen zu zeigen, daß die Werte der Grundcharaktere $\lambda((\mathfrak{p}))$ mod $\mathfrak{f}$ auf den $(n-1)$-dimensionalen Mannigfaltigkeiten $|\lambda| = 1$ überall *gleichmäßig dicht* liegen. Daß sie überall dicht liegen, läßt sich ziemlich einfach mit der in meiner 1. Mitteilung angewandten Methode durch die Divergenz gewisser Dirichletscher Reihen zeigen, wenn man nur weiß, daß die $\zeta(s;\lambda)$ im Punkte $s=1$ stetig und von Null verschieden sind. (Hierzu ist weder die Funktionalgleichung noch die Fortsetzbarkeit der $\zeta(s;\lambda)$, soweit sie mit echten Größencharakteren gebildet sind, erforderlich.) Der Nachweis der *gleichmäßig* dichten Verteilung, zu dem mir die üblichen Methoden der analytischen Zahlentheorie allein nicht ausreichten, ist mir inzwischen durch eine andere Wendung auf folgendem Wege gelungen: Es sei jetzt λ ein echter Größencharakter der Ideale mod $\mathfrak{f}$, $\hat{\varrho}$ eine ganze zu $\mathfrak{f}$ teilerfremde Zahl. Für jeden echten Idealcharakter

$$\lambda((\hat{\mu}))\,\chi_0((\hat{\mu}))$$

gilt dann Gl. (46). Wird nun diese Gleichung mit $\bar{\chi}_0((\hat{\varrho}))$ multipliziert und über sämtliche Charaktere χ_0 mod $\mathfrak{f}$ summiert, so ergibt sich auf der linken Seite

$$\sum_{\chi_0} \bar{\chi}_0((\hat{\varrho})) \sum_{N(\mathfrak{p}) \leqq x} \lambda((\mathfrak{p}))\,\chi_0((\mathfrak{p})) = \sum_{N(\mathfrak{p}) \leqq x} \lambda((\mathfrak{p})) \sum_{\chi_0} \bar{\chi}_0((\hat{\varrho}))\,\chi_0((\mathfrak{p})).$$

Die innere Summe über χ_0 ist aber nur dann von Null verschieden und hat dann den Wert $h_0(\mathfrak{f})$, wenn $\mathfrak{p}$ und $(\hat{\varrho})$ zur selben Klasse von $\mathfrak{J}_0(\mathfrak{f})$ gehören. Ist dies der Fall, so kann man

$$(\mathfrak{p}) = (\hat{\pi})$$

setzen, und $\hat{\pi}$ so wählen, daß

$$\hat{\varrho} \equiv \hat{\pi} \pmod{\mathfrak{f}}, \qquad \frac{\hat{\pi}}{\hat{\varrho}} \text{ total positiv.} \tag{48}$$

Und hierfür ist dann

$$\lambda((\mathfrak{p})) = \lambda((\hat{\pi})) = \lambda(\hat{\pi})\,\chi_0(\hat{\pi}) = \lambda(\hat{\pi})\,\bar{\chi}_0(\hat{\varrho}).$$

So ergibt sich:

Ist $\lambda(\hat{\alpha})$ ein echter Größencharakter der Zahl $\hat{\alpha}$ mod $\mathfrak{f}$, und durchläuft $(\hat{\pi})$ alle verschiedenen Primideale mit den Bedingungen (48) *und $|N(\hat{\pi})| \leqq x$, so ist*

$$\sum_{\hat{\pi}} \lambda(\hat{\pi}) = O(xe^{-c\sqrt{\log x}}). \tag{49}$$

Die Anzahl dieser $\hat{\pi}$ ist

$$\frac{1}{h_0(\mathfrak{f})} \int_2^x \frac{du}{\log u} + O(xe^{-c\sqrt{\log x}}). \tag{50}$$

ir denken uns jetzt diese $\hat{\pi}$ irgendwie nach wachsender Größe der Normen ordnet und dann entsprechend numeriert

$$\hat{\pi}_1, \quad \hat{\pi}_2, \ldots$$

us (49), (50) folgt dann:

Für jeden echten Größencharakter mod $\mathfrak{f}$ *ist*

1) $$\lim_{N=\infty} \frac{1}{N} \sum_{h=1}^{N} \lambda(\hat{\pi}_h) = 0.$$

ir bedenken nun, daß sich jeder echte Größencharakter mod $\mathfrak{f}$ in der Form

$$\lambda(\hat{\alpha}) = e^{2\pi i w(\hat{\alpha})}$$

rstellen läßt, worin $w(\hat{\alpha})$ eine mod 1 vollkommen bestimmte reelle etige) Funktion der n konjugierten Größen $\hat{\alpha}^{(p)}$ ist. Ebenso gestattet $\hat{\alpha}$) eine Darstellung durch $n-1$ Grundcharaktere

$$\lambda_k(\hat{\alpha}) = e^{2\pi i w_k(\hat{\alpha})}, \qquad (k = 1, 2, \ldots, n-1)$$
$$\lambda(\hat{\alpha}) = \lambda_1^{m_1} \cdot \lambda_2^{m_2} \ldots \lambda_{n-1}^{m_{n-1}}$$

it ganzen rationalen $m_1, \ldots, m_{n-1}$.

Die Limes-Gleichung (51) geht daher in folgende über:

$$\lim_{N=\infty} \frac{1}{N} \sum_{h=1}^{N} e^{2\pi i [m_1 w_1(\hat{\pi}_h) + m_2 w_2(\hat{\pi}_h) + \ldots + m_{n-1} w_{n-1}(\hat{\pi}_h)]} = 0$$

ltig für jedes ganze rationale Exponentensystem $m_1, \ldots,$ das nicht aus ıter Nullen besteht.

Nun hat Herr Weyl[4]) gezeigt, daß das Bestehen dieser Gleichungen notwendige und hinreichende Bedingung dafür ist, daß im $(n-1)$-mensionalen Raume die unendlich vielen Punkte P_h mit den Koordinaten

$$P_h : (w_1(\hat{\pi}_h), \ldots, w_{n-1}(\hat{\pi}_h)) \qquad (h = 1, 2, \ldots)$$

d 1 gleichmäßig dicht verteilt liegen.

Daher gilt der Satz: Im Raume von $(n-1)$ Dimensionen sei $\mathfrak{F}$ ein biet vom Volumen $\mathfrak{F}$, das dem Einheitswürfel

$$0 \leqq x_q \leqq 1 \qquad (q = 1, 2, \ldots, n-1)$$

gehört. Sei ferner $z(N)$ die Anzahl derjenigen $\hat{\pi}_h$ für $h = 1, 2, \ldots, N$, ren zugehörige Punkte P_h mit den Koordinaten

$$x_q = w_q(\hat{\pi}_h) \qquad (q = 1, 2, \ldots, n-1)$$

[4]) H. Weyl, Über die Gleichverteilung von Zahlen mod Eins. Math. Ann. Bd. 77 16), S. 319.

dem Bereich $\mathfrak{J}$ angehören. Dann ist

$$\lim_{N=\infty} \frac{z(N)}{N} = \mathfrak{J}.$$

Berücksichtigt man für N Formel (50), so folgt endlich:

Sei $\pi_{\mathfrak{J}}(x; \hat{\varrho}, \mathfrak{f})$ *die Anzahl derjenigen verschiedenen Primideale* ($\hat{\pi}$ *wofür*

$$\hat{\pi} \equiv \hat{\varrho} \pmod{\mathfrak{f}}, \qquad \frac{\hat{\pi}}{\hat{\varrho}} \text{ total positiv}, \qquad |N(\hat{\pi})| \leqq x,$$

während die Punkte mit den Koordinaten

$$x_q = w_q(\hat{\pi}) \qquad (q = 1, 2, \ldots, n -$$

mod 1 *zu* $\mathfrak{J}$ *gehören, so ist*

$$\lim_{x=\infty} \frac{\pi_{\mathfrak{J}}(x, \varrho, \mathfrak{f})}{\frac{x}{\log x}} = \frac{\mathfrak{J}}{h_0(\mathfrak{f})}. \tag{52}$$

Die Grundcharaktere bestimmen, wie in § 1 ausgeführt, die n Zahl

$$\frac{\alpha^{(p)}}{|\sqrt[n]{N(\hat{\alpha})}|} \qquad (p = 1, 2, \ldots,$$

eindeutig bis auf Einheiten mod $\mathfrak{f}$ als Faktoren, wenn man noch wei daß $\hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2, \ldots, \hat{\alpha}_r$ positiv sind. Verstehen wir unter $\hat{\alpha}$ eine solche gan Zahl, daß $(\hat{\alpha}) = \mathfrak{a}$

$$\hat{\alpha}\hat{\varrho} \equiv 1 \pmod{\mathfrak{f}} \text{ und total positiv},$$

so sind in der obigen Bezeichnung $\hat{\alpha}\hat{\pi}$ total positive durch $\mathfrak{a}$ teilba Körperzahlen, welche die Zerlegung $\mathfrak{a}\mathfrak{p}$ ($\mathfrak{p}$ Primideal) haben. Durch ei Basis $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ des Ideals $\mathfrak{a}$ lassen sie sich also in der Form

$$\mu = z_1\alpha_1 + z_2\alpha_2 + \ldots + \alpha_n z_n$$

darstellen und die Zahlen

$$\frac{\mu^{(p)}}{|\sqrt[n]{N(\mu)}|} \qquad (p = 1, 2, \ldots,$$

legen die Verhältnisse der rationalen ganzen Zahlen $z_1, \ldots, z_n$ eindeut fest. Die primitive ganzzahlige Form in n Variabeln

$$\frac{1}{N(\mathfrak{a})} \prod_{p=1}^{n} (\alpha_1^{(p)} z_1 + \alpha_2^{(p)} z_2 + \ldots + \alpha_n^{(p)} z_n) = F(z_1, \ldots, z_n)$$

stellt daher unendlich viele positive Primzahlen dar, auch wenn man f die Verhältnisse der ganzen rationalen Variabeln z einen beliebig klein Spielraum vorschreibt.

Wie sich die genaueren Sätze aus der Sprache der Idealtheorie in d der rationalen Formentheorie übersetzen lassen, soll im nächsten Par

raphen am Beispiel der quadratischen Körper erörtert werden. Das rgebnis wird sich sehr einfach durch die Begriffe der Klein-Cayleyschen Winkelmaßbestimmung ausdrücken.

§ 8.

Lineare Formen in quadratischen Körpern.

Wir betrachten in diesem Paragraphen binäre lineare Formen

$$L(x) = \hat{\alpha}_1 x_1 + \hat{\alpha}_2 x_2 .$$

Die Koeffizienten $\hat{\alpha}$ sollen ganze ideale Zahlen aus einer bestimmten Klasse $\mathfrak{k}$ eines *quadratischen Körpers* k sein, die Variabeln x durchlaufen unabhängig alle *rationalen ganzen* Zahlen. L stellt — die Beschränkung auf diese x-Werte soll als selbstverständlich nicht mehr hervorgehoben werden — nur Zahlen der Klasse $\mathfrak{K}$ dar. Wir setzen weiter voraus, daß $L = 0$ nur für $x_1 = x_2 = 0$ und die Koeffizienten ohne gemeinschaftlichen Teiler. Eine Form mit diesen Eigenschaften heiße *primitive Form aus* $\mathfrak{K}$.

Wir wollen zeigen:

Zu jeder primitiven Form $L(x)$ aus $\mathfrak{K}$ gibt es eine ganze rationale Zahl Q und eine ganze ideale Zahl $\hat{\varrho}$ aus $\mathfrak{K}$, derart, daß alle und nur die ganzen Zahlen $\hat{\omega}$ durch L dargestellt werden, wofür mit irgendeinem ganzen rationalen r

$$\hat{\omega} \equiv r\,\hat{\varrho} \pmod{Q}$$

gilt.

$\hat{\varrho}$ ist im übrigen prim zu Q, und Q bestimmt sich aus der Idealgleichung

(53) $$(Q\sqrt{d}) = (\hat{\alpha}_1 \hat{\alpha}_2' - \hat{\alpha}_2 \hat{\alpha}_1').$$

Sei $\hat{\omega}_1, \hat{\omega}_2$ eine Basis für die Zahlen aus $\mathfrak{K}$. Es gibt dann ganze rationale a_{ik}, wofür

$$\hat{\alpha}_i = a_{i1}\,\hat{\omega}_1 + a_{i2}\,\hat{\omega}_2 \qquad (i = 1, 2)$$

und hierbei ist, weil nach Voraussetzung der Quotient von $\hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2$ nicht rational, die Determinante

(54) $$Q = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Da die Determinante der ω als Ideal $= (\sqrt{d})$ ist, so besteht für dieses Q die Gl. (53).

Ist $\hat{\mu}$ eine beliebige ganze Zahl aus $\mathfrak{K}$, so ist $Q\,\hat{\mu}$ durch L darstellbar. Denn $\hat{\mu} = \frac{x_1 \hat{\alpha}_1 + x_2 \hat{\alpha}_2}{Q}$ mit ganzen rationalen x, wie sich durch Ausrechnung ergibt.

Daraus folgt: Ist $\hat{\mu}$ durch L darstellbar und r beliebig ganz rational, so sind auch alle Zahlen $\hat{\omega}$ darstellbar, wofür

$$\hat{\omega} \equiv r\,\hat{\mu} \pmod{Q}.$$

Denn ist $\hat{\mu} = L(x)$, so ist $r\,\hat{\mu} = L(rx)$; nach dem Vorangehenden ist $\hat{\omega} - L(rx)$ als Multiplum von Q durch L darstellbar, etwa gleich $L(y)$, daher $\hat{\omega} = L(rx + y)$.

L ist fähig, auch solche Zahlen $\hat{\varrho}$ darzustellen, welche mit Q keinen rationalen Teiler gemein haben. Wir haben dazu nur die ganzen rationalen Zahlen u_1, u_2 so zu bestimmen, daß

$$\hat{\varrho} = u_1\,\hat{\alpha}_1 + u_2\,\hat{\alpha}_2 = (u_1\,a_{11} + u_2\,a_{21})\,\hat{\omega}_1 + (u_1\,a_{12} + u_2\,a_{22})\,\hat{\omega}_2$$

und hierin die drei Zahlen

$$Q \text{ und } U_i = u_1\,a_{1i} + u_2\,a_{2i} \qquad (i = 1, 2) \tag{55}$$

ohne gemeinschaftlichen Teiler sind. Diese Bestimmung ist möglich. Denn ist p irgendeine in Q genau zur m-ten Potenz $(m > 0)$ aufgehende Primzahl, so muß mindestens eine der vier Größen a_{ik} zu p prim sein, weil sonst p in $\hat{\alpha}_1$ und $\hat{\alpha}_2$ aufginge. Ist etwa a_{11} zu p prim, so wähle man

$$u_1 \equiv 1 \pmod{p^m}, \qquad u_2 \equiv 0 \,(p^m),$$

Die so resultierenden Größen U haben dann mit p keinen gemeinschaftlichen Teiler. Verfährt man analog in bezug auf die übrigen Primfaktoren von Q, so erhält man eine Reihe von Kongruenzen für u_1, u_2 nach den übrigen p, deren simultane Befriedigung Gewähr leistet, daß die damit gebildeten U_1, U_2 einen gemeinschaftlichen Teiler haben, der durch keines der p teilbar, also zu Q prim ist.

Es sei nun $\hat{\varrho}$ eine so durch L dargestellte Zahl. Dann gibt es ein ganzes rationales r_1 mit

$$\hat{\alpha}_1 \equiv r_1\,\hat{\varrho} \pmod{Q}.$$

Diese Kongruenz ist identisch mit folgenden beiden:

$$\begin{aligned} a_{11} &\equiv r_1\,U_1 \\ a_{12} &\equiv r_1\,U_2 \end{aligned} \pmod{Q}. \tag{56}$$

Um r_1 zu finden, nehme man N_1, N_2, N so als ganze rationale Zahlen, daß

$$N_1\,U_1 + N_2\,U_2 + NQ = 1, \tag{57}$$

was wegen $(U_1, U_2, Q) = 1$ möglich ist. Aus (56) folgt dann

$$r_1 \equiv N_1\,a_{11} + N_2\,a_{12} \pmod{Q}.$$

Wählt man dann r_1 irgendwie gemäß dieser Kongruenz, so folgt wegen (55), (57)

$$r_1 U_1 \equiv N_1 U_1 a_{11} + N_2 U_1 a_{12} \equiv (1 - N_2 U_2) a_{11} + N_2 U_1 a_{12}$$
$$\equiv a_{11} + N_2 (U_1 a_{11} - U_2 a_{11}) \equiv a_{11} \pmod{Q},$$

d analog die zweite Kongruenz (56).

Ebenso gibt es ein ganzes rationales r_2 mit

3) $$\hat{\alpha}_2 \equiv r_2 \hat{\varrho} \pmod{Q}.$$

Daher ist jede Zahl $L(x)$ kongruent dem Produkt von $\hat{\varrho}$ und einer nzen rationalen Zahl $\pmod{Q}$ und da $\hat{\varrho}$ selbst durch L darstellbar, ist le derartige Zahl auch umgekehrt wirklich durch L darstellbar. Der sgesprochene Satz ist damit vollständig bewiesen; $\hat{\varrho}$ ist offenbar auch m zu Q, da L primitiv ist.

Die Umkehrung ist leicht zu beweisen:

Wenn Q ganz rational, $\hat{\varrho}$ eine ganze zu Q teilerfremde Zahl einer asse $\mathfrak{R}$, so ist die Gesamtheit der ganzen $\hat{\omega}$ aus $\mathfrak{R}$, welche für irgend- ganzes rationales r eine Kongruenz

$$\hat{\omega} \equiv r \hat{\varrho} \pmod{Q}$$

üllen, identisch mit denjenigen Zahlen, welche durch eine gewisse pri- tive lineare Form aus $\mathfrak{R}$ dargestellt werden.

Die Zahlen $\hat{\omega}$ bilden nämlich offenbar einen Modul. Er besitzt daher h bekannten Sätzen eine Basis $\hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2$, d. h. seine sämtlichen Zahlen l nur diese erhält man mit ganzen rationalen x_1, x_2 durch

$$L(x) = \hat{\alpha}_1 x_1 + \hat{\alpha}_2 x_2.$$

Hierbei sind $\hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2$ prim zueinander, weil die dargestellten Zahlen $\hat{\omega}$ h ihrer Definition keinen gemeinschaftlichen Teiler haben.

Jede Form $L(x)$ gibt nun Anlaß zu einer *quadratischen Form* mit nzen rationalen Koeffizienten und der Determinante $\pm Q^2 d$. Es sei nlich $\hat{\omega}$ irgendeine mit rationalem x durch L darstellbare Zahl. Der sdruck

$$F(x) = \left(\frac{\hat{\omega}}{|\hat{\omega}|}\frac{\hat{\omega}'}{|\hat{\omega}'|}\right)^{-1} (\hat{\alpha}_1 x_1 + \hat{\alpha}_2 x_2)(\hat{\alpha}_1' x_1 + \hat{\alpha}_2' x_2) = a x_1^2 + b x_1 x_2 + c x_2^2$$

dann eine primitive quadratische Form mit ganzen rationalen Koeffi- nten. Um das einzusehen, müssen wir den Fall reeller und imaginärer rper trennen.

a) Ist der Körper k imaginär, so ist die Einführung der ω über- sig, da der erste Faktor in F offenbar stets den Wert $+1$ hat.

Die Koeffizienten von F sind

) $$a = \hat{\alpha}_1 \bar{\hat{\alpha}}_1, \quad b = \hat{\alpha}_1 \bar{\hat{\alpha}}_2 + \hat{\alpha}_2 \bar{\hat{\alpha}}_1, \quad c = \hat{\alpha}_2 \bar{\hat{\alpha}}_2.$$

sind ganz, weil die $\hat{\alpha}$ ganz sind, und rational, weil

$$\hat{\alpha} \bar{\hat{\alpha}} = |N(\hat{\alpha})|.$$

Endlich sind a, b, c ohne gemeinsamen Teiler, weil L primitiv ist. Die Diskriminante von F ist

$$b^2 - 4ac = (\hat{\alpha}_1 \bar{\hat{\alpha}}_2 - \hat{\alpha}_2 \bar{\hat{\alpha}}_1)^2 < 0$$

und $a, c > 0$.

b) Ist k reell, so ist nach Definition der idealen Zahlen

$$\frac{\hat{\omega}}{|\hat{\omega}|} \quad \text{und} \quad \frac{\hat{\omega}'}{|\hat{\omega}'|}$$

eine Einheitswurzel. Die Koeffizienten von F sind

$$a = \frac{\hat{\alpha}_1}{\hat{\omega}} \frac{\hat{\alpha}_1'}{\hat{\omega}'} \cdot |\hat{\omega}\hat{\omega}'|,$$

$$b = \left(\frac{\hat{\alpha}_1}{\hat{\omega}} \frac{\hat{\alpha}_2'}{\hat{\omega}'} + \frac{\hat{\alpha}_2}{\hat{\omega}} \frac{\hat{\alpha}_1'}{\hat{\omega}'}\right) |\hat{\omega}\hat{\omega}'|,$$

$$c = \frac{\hat{\alpha}_2}{\hat{\omega}} \cdot \frac{\hat{\alpha}_2'}{\hat{\omega}'} |\hat{\omega}\hat{\omega}'|.$$

Da

$$|\hat{\omega}\hat{\omega}'| = |N(\hat{\omega})|$$

rational und die $\frac{\hat{\alpha}_i}{\hat{\omega}}$ Körperzahlen, so sind die a, b, c rational und, wie oben, ganz und ohne gemeinsamen Teiler. Die Diskriminante $b^2 - 4ac$ ist positiv und als Ideal

$$(b^2 - 4ac) = (\hat{\alpha}_1 \hat{\alpha}_2' - \hat{\alpha}_2 \hat{\alpha}_1')^2 = (Q^2 d).$$

Umgekehrt gibt es zu jeder primitiven ganzzahligen Form F mit der Diskriminante $b^2 - 4ac = \pm Q^2 d$ eine Form L und ein $\hat{\omega}$, so daß (59) besteht, wenn noch $a > 0$, falls $b^2 - 4ac < 0$.

a) Sei $b^2 - 4ac = -Q^2 d < 0$, $a > 0$. Zur Bestimmung der $\hat{\alpha}$ dient (60), woraus sich ergibt

$$\hat{\alpha}_1 \hat{\alpha}_2 = \frac{b + Q\sqrt{-d}}{2}, \qquad \bar{\hat{\alpha}}_1 \hat{\alpha}_2 = \frac{b - Q\sqrt{-d}}{2}$$

($\sqrt{-d}$ hat beide Male dieselbe Bedeutung). Es sei nun $\hat{\tau}$ eine solche ideale Zahl, daß

$$(\hat{\tau}) = \left(\frac{b + Q\sqrt{-d}}{2}, \; c\right).$$

Es ist dann

$$(\hat{\tau}\bar{\hat{\tau}}) = \left(\frac{b + Q\sqrt{-d}}{2}, \; c\right)\left(\frac{b - Q\sqrt{-d}}{2}, \; c\right) = \left(\frac{b^2 + Q^2 d}{4}, \; c\frac{b + Q\sqrt{-d}}{2}, \; c\frac{b - Q\sqrt{-d}}{2}, \; c^2\right)$$

$$= (c)\left(a, \; \frac{b + Q\sqrt{-d}}{2}, \; \frac{b - Q\sqrt{-d}}{2}, \; c\right).$$

Der letzte Idealfaktor ist aber 1, da er die teilerfremden Zahlen a, b, c enthält. Also

$$(\hat{\tau}\bar{\hat{\tau}}) = (c)$$

nd daher

$$\hat{\tau}\,\hat{\tau}^{-} = c,$$

eil $c > 0$. Die so bestimmten Zahlen

$$\hat{\alpha}_1 = \frac{b+Q\sqrt{-d}}{2\,\hat{\tau}}, \quad \hat{\alpha}_2 = \frac{c}{\hat{\tau}} = \bar{\hat{\tau}}$$

nd daher ganze teilerfremde Zahlen und erzeugen eine Form L mit den ehaupteten Eigenschaften.

b) k sei reell. Wir setzen wieder

$$(\hat{\tau}) = \left(\frac{b+Q\sqrt{d}}{2},\ c\right),$$

lso

$$(\hat{\tau}\,\hat{\tau}') = (c).$$

ier können wir aber nur schließen

$$|\hat{\tau}\,\hat{\tau}'| = |N(\hat{\tau})| = |c|.$$

lso

$$\hat{\tau}\,\hat{\tau}' = \zeta^{-1} c,$$

o ζ eine Einheitswurzel. Setzen wir wieder

$$\hat{\alpha}_1 = \frac{b+Q\sqrt{d}}{2\,\hat{\tau}}, \quad \hat{\alpha}_2 = \frac{c}{\hat{\tau}},$$

ist

$$L(x) = \hat{\alpha}_1 x_1 + \hat{\alpha}_2 x_2$$

ne primitive ganzzahlige Form und das Produkt von L und der Kongierten ist eine quadratische Form mit den Koeffizienten

$$\zeta a, \quad \zeta b, \quad \zeta c.$$

st $c > 0$, so setzen wir

$$\hat{\omega} = \hat{\alpha}_2;$$

t $c < 0$, so setzen wir

$$\hat{\omega} = \hat{\alpha}_2 \sqrt{d}.$$

n beiden Fällen ist

$$\frac{\hat{\omega}\,\hat{\omega}'}{|\hat{\omega}\,\hat{\omega}'|} = \operatorname{sgn} c \cdot \frac{\hat{\alpha}_2\,\hat{\alpha}_2'}{|\hat{\alpha}_2\,\hat{\alpha}_2'|} = \zeta,$$

lso besteht mit diesem $\hat{\omega}$, $\hat{\alpha}$ die Gleichung (59).

Durch verschiedene Wahl der $\hat{\omega}$ enthält man bei demselben L offenar nur zwei verschiedene Formen F, diese unterscheiden sich im Vorzeichen.

§ 9.

Imaginäre quadratische Körper.

Im imaginären quadratischen Körper der Diskriminante $-d$ gibt es ur endlich viele Einheiten mod $\mathfrak{f}$, ihre Anzahl g ist im allgemeinen $= 1$.

Jeder Zahlcharakter mod $\mathfrak{f}$ hat die Form

$$\lambda^a(\hat{\mu}) = \left(\frac{\hat{\mu}}{|\hat{\mu}|}\right)^{ga} \qquad (a = \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Die Zetafunktionen sind

$$\zeta(s; \lambda^a\chi) = \frac{1}{g'}\sum_{\hat{\mu}} \left(\frac{\hat{\mu}}{|\hat{\mu}|}\right)^{ga} \frac{\chi((\hat{\mu}))}{|N(\hat{\mu})|^s},$$

worin jetzt $\hat{\mu}$ sämtliche ganzen, dem Körper zugeordneten idealen Zahlen außer Null durchläuft. (Jedes Ideal $(\hat{\mu})$ kommt in der Summe dann ja g'-mal vor, wenn g' die Anzahl aller Einheiten in k ist.) Der Γ-Faktor in der Funktionalgleichung ist

$$\Gamma(s; \lambda^a\chi) = \Gamma\left(s + \frac{|ga|}{2}\right); \quad \gamma(\lambda) = 1, \quad A = \frac{1}{2\pi}\left|\sqrt{d\,N(\mathfrak{f})}\right|.$$

Die Summen über die einzelnen Klassen $\zeta(s; \lambda, \mathfrak{K})$ sind in einem andern Zusammenhang zuerst bei Herrn Herglotz[5]) aufgetreten, sodann besonders mit Rücksicht auf ihre Funktionalgleichung erst von Herrn Epstein[6]) behandelt worden, der auch eine Verallgemeinerung auf mehrere Variable gibt. An beiden Stellen bleibt übrigens die im vorhergehenden entwickelte zahlentheoretische Bedeutung dieser Funktionen unbemerkt. Nun sei F eine positiv definite ganzzahlige primitive quadratische Form mit der Diskriminante $-Q^2 d$. Nach § 7 gibt es im Körper $k(\sqrt{-d})$ eine Klasse $\mathfrak{K}$ und eine primitive lineare Form aus $\mathfrak{K}$,

$$L(x) = \hat{\alpha}_1 x_1 + \hat{\alpha}_2 x_2,$$

derart, daß

$$L(x)\cdot\overline{L}(x) = (\hat{\alpha}_1 x_1 + \hat{\alpha}_2 x_2)(\overline{\hat{\alpha}}_1 x_1 + \overline{\hat{\alpha}}_2 x_2) = a x_1^2 + b x_1 x_2 + c x_2^2 = F(x_1, x_2).$$

Wie weit die $\hat{\alpha}$ durch F bestimmt sind, kommt weiter nicht in Betracht. Ferner existiert ein ganzes (zu Q teilerfremdes) $\hat{\varrho}$ aus $\mathfrak{K}$, derart daß *durch die quadratische Form F alle und nur die ganzen rationalen n dargestellt werden, wofür*

$$n = N(\hat{\mu})$$
$$\hat{\mu} \equiv r\,\hat{\varrho} \pmod{Q}$$

mit irgendeinem ganzen rationalen r. Jedes Wertepaar x_1, x_2 mit $F(x_1, x_2) = n$ führt eindeutig zu einem $\hat{\mu}$ dieser Art und umgekehrt.

Ist $\hat{\mu} = L(x)$, $\hat{\nu} = L(y)$, und sind $\hat{\mu}$ und $\hat{\nu}$ assoziiert, so nennen wir auch die beiden rationalen Zahlenpaare x_1, x_2 und y_1, y_2 assoziiert.

Wir denken uns jetzt in der Ebene x_1, x_2 als rechtwinkelige Cartesische Koordinaten und konstruieren sodann das Gitter aller Punkte mit

---

[5]) Herglotz, Über die analytische Fortsetzung gewisser Dirichletscher Reihen, Math. Ann. 61 (1905), S. 551–560.

[6]) P. Epstein, Zur Theorie allgemeiner Zetafunktionen II, Math. Ann. 63 (1906), S. 205–216.

anzzahligen x_1, x_2. Jedem Gitterpunkt entspricht genau ein $\hat{\mu} = L(x)$ nd umgekehrt. Wir sprechen vom „Punkte $\hat{\mu}$" und übertragen die auf e Zahlen $\hat{\mu}$ bezüglichen Termini einfach auf die Punkte $\hat{\mu}$.

Sei jetzt

$$\lambda(\hat{\mu}) = \left(\frac{\hat{\mu}}{|\hat{\mu}|}\right)^g = e^{2\pi i w(\hat{\mu})}$$

er Grundcharakter mod Q. Diese Funktionen $\lambda(\hat{\mu})$ und $w(\hat{\mu})$ sind Funkonen des Ortes in der x_1- x_2-Ebene; sie haben den gleichen Wert für le Punkte, welche derselben vom Nullpunkt aus gezogenen Halbgeraden ngehören, denn für jedes positive A ist

$$\lambda(t\hat{\mu}) = \lambda(\hat{\mu}).$$

nter diesen Halbgeraden gibt es g verschiedene (und nicht mehr), denen er Wert $\lambda = 1$ zukommt, d. h. $w = 0$ oder einer ganzen rationalen Zahl. Wir verabreden, den Punkten derjenigen Halbgeraden, welche reelle positive $\hat{\mu}$-Werte entsprechen, den Wert $w = 0$ zuzuordnen, diese Halbgerade eiße die Null-Linie. Den $g - 1$ zur Null-Linie mod Q assoziierten Halberaden, welche auch $\lambda = 1$ haben, ordnen sich dann in bestimmter Weise e Werte $w = 1, 2, \ldots, g - 1$ zu, derart, daß $w(\hat{\mu})$ eine eindeutige und etige Funktion des Ortes in der längs der Null-Linie aufgeschnittenen - x_2-Ebene ist, deren Werte an den beiden Ufern des Schnittes um g fferieren.

Zwei vom Nullpunkt durch $\hat{\mu}$ und $\hat{\nu}$ gezogenen Halbgeraden kommt nn eine bestimmte Zahl $w(\hat{\mu}) - w(\hat{\nu})$ zu, und diese Differenz ist nichts nderes als der (im allgemeinen) *Nicht-Euklidische Winkel*, welchen diese albgeraden in einer auf die Form $F(x_1, x_2)$ gegründeten Cayley-Kleinhen Maßbestimmung miteinander bilden. Im Sinne der projektiven eometrie definiert nämlich $F = 0$ ein Paar konjugiert imaginärer Punkte f der unendlich fernen Geraden $x_3 = 0$, also einen ausgearteten Kegelhnitt. Der Winkel zweier vom Nullpunkt durch die beiden Punkte x_1, x_2 und y_1, y_2 gezogenen Halbgeraden in der entsprechenden auf F gründeten (parabolischen) Maßbestimmung ist bekanntlich

$$\frac{c}{i}\log\left(\frac{\hat{\alpha}_1 x_1 + \hat{\alpha}_2 x_2}{\bar{\hat{\alpha}}_1 x_1 + \bar{\hat{\alpha}}_2 x_2} \cdot \frac{\bar{\hat{\alpha}}_1 y_1 + \bar{\hat{\alpha}}_2 y_2}{\hat{\alpha}_1 y_1 + \hat{\alpha}_2 y_2}\right) = \frac{c}{i}\log\left(\frac{\hat{\mu}}{\bar{\hat{\mu}}} : \frac{\hat{\nu}}{\bar{\hat{\nu}}}\right) = \frac{2c}{gi}\log\left\{\left(\frac{\hat{\mu}}{|\hat{\mu}|}\right)^g : \left(\frac{\hat{\nu}}{|\hat{\nu}|}\right)^g\right\}$$

$$\frac{2c}{gi}(w(\hat{\mu}) - w(\hat{\nu}))\cdot 2\pi i = \frac{4\pi c}{g}(w(\hat{\mu}) - w(\hat{\nu})).$$

ird der reelle Proportionalitätsfaktor $c = \frac{g}{4\pi}$ gesetzt, so haben wir als inkelmaß gerade $w(\hat{\mu}) - w(\hat{\nu})$, es bedeutet, daß der Vollwinkel die ißzahl g erhält.

Wir nehmen jetzt zwei beliebige vom Nullpunkt ausgehende Halbraden, welche einen N.-E.-Winkel $\vartheta < 1$ miteinander bilden. Der

Winkelraum werde J genannt. Er enthält keine zwei mod Q assoziierten Punkte. Die Aussage: $\hat{\mu}$ liegt in J, ist also gleichbedeutend damit, daß $w(\hat{\mu})$ einem gewissen Intervall von der Größe ϑ angehört. Der Satz von § 6 Gleichung (52) lautet daher in diesem Fall:

Durchläuft

$$\hat{\pi} = \hat{\alpha}_1 x_1 + \hat{\alpha}_2 x_2$$

sämtliche Primzahlen, wofür $\hat{\pi}$ dem Bereich J von der Größe $\vartheta < 1$ angehört und

$$\hat{\pi} \equiv \hat{\varrho} \,(\mathrm{mod}\, Q), \quad N(\hat{\pi}) \leqq t,$$

so ist für die Anzahl $z(t; \hat{\varrho}, Q)$ dieser $\hat{\pi}$

$$\lim_{t=\infty} \frac{z(t; \hat{\varrho}, Q)}{\frac{t}{\log t}} = \frac{\vartheta}{h Q}.$$

Ist weiter $r_1, r_2, \ldots, r_m$ ein vollständiges reduziertes Restsystem rationaler Zahlen mod Q ($m = \varphi(Q)$), so ist daher die Anzahl aller $\hat{\pi}$, wofür bei irgendeinem k

$$\hat{\pi} \equiv \hat{\varrho}\, r_k \,(\mathrm{mod}\, Q), \quad N(\hat{\pi}) \leqq t$$

und $\hat{\pi}$ in J gelegen, asymptotisch $= \frac{\vartheta \cdot \varphi(Q)}{h(Q)} \frac{t}{\log t}$. Alle und nur diese Primzahlen werden durch die lineare Form $L(x) = \hat{\alpha}_1 x_1 + \hat{\alpha}_2 x_2$ dargestellt (abgesehen von den endlich vielen in Q aufgehenden Primzahlen). Ihre Normen und nur diese liefern die Primzahlen p, welche durch $F(x_1, x_2)$ dargestellt werden und dabei kommt jede dieser Primzahlen p möglicherweise bei mehreren x_1, x_2 in Frage. Somit ergibt sich schließlich:

Die Anzahl der (x_1, x_2), welche dem Winkelraum J von der Größe ϑ angehören und wofür die quadratische Form

$$F(x_1, x_2) = \text{Primzahl} \leqq t,$$

ist asymptotisch gleich

$$\vartheta \frac{\varphi(Q)}{h(Q)} \frac{t}{\log t}.$$

Der Winkel ϑ ist dabei in der oben angegebenen allein durch die Form F bestimmten Nicht-Euklidischen Art zu messen. In der obigen Formulierung ist der Satz ersichtlich auch für beliebige Winkelräume kleiner als der Vollwinkel richtig.

Folglich ist die Anzahl der Primzahlpunkte $\hat{\pi}$, wofür bei festem $k_1, k_2, \vartheta_1, \vartheta_2$

$$\vartheta_1 \leqq w(\hat{\pi}) \leqq \vartheta_2,$$

$$k_1 t \leqq N(\hat{\pi}) \leqq k_2 t$$

mptotisch gleich

$$(\vartheta_2 - \vartheta_1)(k_2 - k_1)\frac{\varphi(Q)}{h(Q)}\frac{t}{\log t}.$$

bei ist $(\vartheta_2 - \vartheta_1)(k_2 - k_1)$ der Nicht-Euklidische (mit Bezug auf F) nessene Flächeninhalt des Gebietes

$$\begin{cases} \vartheta_1 \leqq w(\hat{\alpha}_1 x_1 + \hat{\alpha}_2 x_2) \leqq \vartheta_2, \\ k_1 \leqq F(x_1, x_2) \leqq k_2, \end{cases}$$

wiederum gleich

$$\frac{|g\sqrt{D}|}{2\pi}\int\int dx_1\, dx_2,$$

treckt über das Gebiet (62), ist.

Nach bekannten Prinzipien gilt daher eine zu (61) analoge Formel ein *beliebig gestaltetes* Gebiet. Wir sprechen sie so aus:

Sei V ein endliches zweidimensionales Gebiet der x_1-x_2-Ebene, sen Euklidischer Flächeninhalt auch mit V bezeichnet werde. V_t bete das entsprechende, durch Streckung vom Nullpunkt im Verhältnis t entstehende Gebiet. *Die Anzahl $\pi(t)$ der Punkte x_1, x_2 aus V_t, für $F(x_1, x_2)$ eine Primzahl, ist dann asymptotisch*

$$\pi(t) \sim V \cdot \frac{t^2}{\log t^2} \cdot \frac{g|\sqrt{D}|}{2\pi}\frac{\varphi(Q)}{h(Q)}.$$

Anzahl *aller* Gitterpunkte in V_t sei $z(t)$. Hierfür ist

$$z(t) \sim V \cdot t^2.$$

ließlich also

$$\lim_{t=\infty} \frac{\pi(t)}{\frac{z(t)}{\log z(t)}} = \frac{g|\sqrt{D}|}{2\pi}\frac{\varphi(Q)}{h(Q)}.$$

Konstante rechts läßt sich unter Einsetzen von $h(Q)$ in die Form zen:

$$\frac{1}{\varkappa h} \cdot \frac{1}{\prod_{q/Q}\left\{1 - \left(\frac{-d}{q}\right)\frac{1}{q}\right\}}.$$

r ist $\varkappa \cdot h$ der Koeffizient von $\frac{1}{s-1}$ in der Entwicklung der Zetafunktion Körpers, also unabhängig von Q. Das Produkt ist über die verschiedenen rationalen Primzahlen q zu erstrecken, welche in Q aufgehen.

Wir wollen noch die Anzahl der Primzahlen untersuchen, welche ch die quadratische Form dargestellt werden, wenn x_1, x_2 nur die len gewisser arithmetischer Reihen durchlaufen.

Sei k eine ganze rationale Zahl,

$$\hat{o} = m_1 \hat{\alpha}_1 + m_2 \hat{\alpha}_2 = L(m_1, m_2)$$

eine durch L darstellbare Zahl; wir betrachten die Zahlen, die für ganze x_1, x_2 durch

$$\hat{\mu} = L(kx_1 + m_1, kx_2 + m_2)$$

dargestellt werden. Nach dem Vorhergehenden sind es diejenigen Zahlen, wofür

$$\frac{\hat{\mu} - \hat{o}}{k} \text{ durch } L \text{ darstellbar,} \tag{64}$$

d. h.

$$\hat{\mu} \equiv \hat{o} + kr\hat{\varrho} \pmod{kQ} \tag{65}$$

mit irgendeinem ganzen rationalen r. Bei festem r, $\hat{o}$ haben die durch (65) definierten $\hat{\mu}$ entweder einen gemeinschaftlichen Teiler — dieser geht alsdann in kQ auf — oder das ist nicht der Fall, und dann kommen nach § 6 unter den $\hat{\mu}$ auch unendlich viele Primzahlen vor. Damit dies der Fall, ist notwendig und hinreichend, daß

$$\begin{cases} \hat{o} \text{ prim zu } k, \quad s + kr \text{ prim zu } Q, \\ \text{wobei } \sigma \equiv s\hat{\varrho} \pmod{Q}. \end{cases} \tag{66}$$

Wir nehmen an, diese Bedingungen seien für ein r erfüllt. Durch elementare Betrachtungen findet man, daß dann die Anzahl *aller* mod t inkongruenten r, wofür $s + kr$ prim zu Q, gleich

$$Q \prod_{\substack{p/Q \\ p,k=1}} \left(1 - \frac{1}{p}\right). \tag{67}$$

p durchläuft alle Primteiler von Q, die nicht in k aufgehen. Gibt es unter den Zahlen $\hat{\mu}$ solche, die zu kQ prim sind, was wir ja voraussetzen, so können wir von vornherein $\hat{o}$ gleich einer solchen Zahl nehmen; die Gesamtheit der alsdann durch $L(kx_1 + m_1, kx_2 + m_2)$ dargestellten Zahlen bleibt dabei unverändert.

Die Anzahl der Primzahlen $\hat{\pi} \equiv \hat{o} + kr\hat{\varrho} \pmod{kQ}$, wobei die Punkte $(kx_1 + m_1, kx_2 + m_2)$ einem Winkelraum von der Größe ϑ (wie früher gemessen) angehören, während ihre Norm $\leqq t$ ist, ist daher asymptotisch

$$\frac{\vartheta}{g}\,\frac{w}{h} \cdot \frac{1}{k^2Q^2 \prod_{p/Qk}\left(1 - \frac{1}{p}\right)\left(1 - \left(\frac{-d}{p}\right)\frac{1}{p}\right)} \cdot \frac{t}{\log t}.$$

w ist die Anzahl aller Einheiten des Körpers.

Da die lineare Funktion $L(kx_1 + m_1, kx_2 + m_2)$ soviel verschiedene Kongruenzen erzeugt, als (67) angibt, so ist endlich wie auf S. 47:

Die Anzahl der Punkte $kx_1 + m_1, kx_2 + m_2$, welche in einem Bereich V_t liegen, der aus V durch Dehnung im Verhältnis $1 : t$ entsteht und wofür

$$F(kx_1 + m_1, kx_2 + m_2) = \text{Primzahl},$$

asymptotisch gleich

$$\frac{1}{\varkappa h}\cdot\frac{1}{k^2\prod\limits_{\substack{p/k\\p+Q}}\left(1-\frac{1}{p}\right)\prod\limits_{q/Qk}\left(1-\left(\frac{-d}{q}\right)\frac{1}{q}\right)}\frac{V\cdot t^2}{\log t^2}.$$

raussetzung ist nur, daß es überhaupt ein ganzes x_1, x_2 gibt, wobei kx_1+m_1, kx_2+m_2) zu kQ teilerfremd ist.

Im Zusammenhang mit diesen Untersuchungen erhebt sich gleich die age, *welchen Wert die Funktionen* $\xi(s;\lambda)$ *im Punkte* $s=1$ *haben.* Es nun sehr bemerkenswert, daß es dabei *zwei ganz verschiedene Arten* merischer Werte gibt. Die eine Art entspricht denjenigen λ, wo der ponent ga eine gerade Zahl ist. Diese lassen sich alle durch elliptische dulfunktionen, deren Argument eine Zahl aus k ist, ausdrücken. Die dere Art, wo ga eine ungerade Zahl ist, führt dagegen auf *neue Tran-ndenten,* und zwar auf solche, welche mir inzwischen bei einer ganz deren Gelegenheit, bei der Klassenzahlbestimmung gewisser höherer Zahl-per, entgegengetreten sind. Diese Untersuchungen habe ich jedoch noch ht zum Abschluß bringen können.

§ 10.

Reelle quadratische Körper.

Im reellen quadratischen Körper der Diskrimininante d sind die ßencharaktere mod $\mathfrak{f}$

$$\lambda^m(\hat{\mu})=e^{2\pi i w(\hat{\mu})m} \qquad (m=\pm1,\pm2,\ldots)$$
$$w(\hat{\mu})=\frac{1}{2\log|\eta|}\log\left|\frac{\hat{\mu}}{\hat{\mu}'}\right|,$$

in $\eta\,(\eta>1)$ die Grundeinheit mod $\mathfrak{f}$ ist. Die Anzahl g der Einheits-zeln mod $\mathfrak{f}$ ist 1. Hier gibt es aber noch Vorzeichencharaktere

$$v(\hat{\mu})=\left(\frac{\hat{\mu}}{|\hat{\mu}|}\right)^{a_1}\left(\frac{\hat{\mu}'}{|\hat{\mu}'|}\right)^{a_2} \qquad (a_1,a_2=0,1).$$

Jeder Idealcharakter von $\mathfrak{J}_0(\mathfrak{f})$ hat die Form

$$\lambda^m\cdot v\cdot\chi=\lambda((\hat{\mu})),$$

χ ein Klassencharakter von $\mathfrak{J}(\mathfrak{f})$ ist. Der Γ-Faktor, der in der ktionalgleichung von $\zeta(s;\lambda)$ auftritt, ist

$$\Gamma(s;\lambda)=\Gamma\left(\frac{s+a_1}{2}+\frac{\pi i m}{2\log|\eta|}\right)\Gamma\left(\frac{s+a_2}{2}-\frac{\pi i m}{2\log|\eta|}\right),$$
$$\gamma(\lambda)=1,$$
$$A=\frac{1}{\pi}\left|\sqrt{d}\,N(\mathfrak{f})\right|.$$

Sei jetzt F eine ganzzahlige primitive quadratische Form mit der Diskriminante $Q^2 d > 0$. Nach § 7 gibt es zu F im Körper $k(\sqrt{d})$ eine primitive Linearform L und eine ganze Zahl $\hat{\omega}$ aus L derart, daß

$$L = \hat{\alpha}_1 x_1 + \hat{\alpha}_2 x_2,$$

$$F = L L' \left(\frac{N(\hat{\omega})}{|N(\hat{\omega})|}\right)^{-1}.$$

Die durch L darstellbaren Zahlen $\hat{\mu}$ sind genau diejenigen, welche für irgendein ganzes rationales r die Kongruenz

$$\hat{\mu} \equiv r\,\hat{\varrho} \pmod{Q}$$

befriedigen, wobei $\hat{\varrho}$ eine beliebige durch L darstellbare, zu Q teilerfremde Zahl bedeutet. Es ist offenbar keine Einschränkung, die Zahlen $\hat{\omega}$ und $\hat{\varrho}$ als identisch anzunehmen.

Die Größe $w(\hat{\mu})$, welche nach (68) in den Charakteren mod Q auftritt, hat nun die Bedeutung eines *Nicht-Euklidischen Winkelmaßes* in einer auf $F = 0$ gegründeten Maßbestimmung. Durch die Form F werden nämlich in der (x_1, x_2)-Ebene zwei verschiedene Geraden $F = 0$ bestimmt, die Asymptoten der Hyperbelschar $F = \text{const}$. Wir wollen die Variabeln x_1, x_2 auf einen ganz bestimmten der durch das Asymptotenpaar gegebenen Quadranten beschränken, nämlich auf denjenigen, wo

$$\frac{\hat{\mu}}{\hat{\omega}} > 0, \qquad \frac{\hat{\mu}'}{\hat{\omega}'} > 0.$$

Er heiße der Quadrant $(\hat{\omega})$. Berechnen wir jetzt für zwei von Null ausgehende, nach den Punkten $\hat{\mu}, \hat{\nu}$ dieses Quadranten gezogene Halbgeraden den Winkel! Dabei legen wir als absolutes Gebilde den ausgearteten Kegelschnitt $F = 0, x_3 = 0$, d. h. ein Paar reelle Punkte der unendlich fernen Geraden zugrunde. (Diese parabolische Maßbestimmung ist übrigens die gleiche, welche der alten Einstein-Minkowskischen Relativitätstheorie zugrunde liegt, definiert durch die Lorentzgruppe in zwei Variabeln.)

Als Maß für den Winkel findet sich dann

$$k \log\left(\frac{\hat{\mu}}{\hat{\nu}} : \frac{\hat{\mu}'}{\hat{\nu}'}\right).$$

Wählen wir den Faktor k so, daß der Winkel $= 1$ wird für die Strahlen nach $\hat{\mu}$ und $\eta\hat{\mu}$, so erhalten wir als Winkelmaß gerade

$$w(\hat{\mu}) - w(\hat{\nu}).$$

Das asymptotische Gesetz, welches in § 6 bewiesen wurde, lautet also hier:

Die Anzahl der Punkte (x_1, x_2), welche im Quadranten $(\hat{\varrho})$ liegen, l dem Winkelraum J von der Größe ϑ angehören, und wofür

$\hat{\mu} = \hat{\alpha}_1 x_1 + \hat{\alpha}_2 x_2 \equiv \hat{\varrho} \pmod{Q}, \quad |N(\hat{\mu})| = F(x_1, x_2) = \text{Primzahl} \leqq t$

asymptotisch gleich

$$\frac{\vartheta}{h_0(Q)} \frac{t}{\log t};$$

ist der Nicht-Euklidische Flächeninhalt des Stückes von J, das dem reich $F \leqq t$ angehört, dieser ist aber wieder

$$\frac{Q\sqrt{d}}{\log|\eta|} \asymp \text{Euklidischer Flächeninhalt.}$$

raus folgt endlich wie in § 8:

Sei V ein endliches zweidimensionales Gebiet der x_1- x_2-Ebene, vom klidischen Inhalt V. V_t bedeute das aus V durch Streckung vom lpunkt aus im Verhältnis $1:t$ entstehende Gebiet. Überdies gehöre dem Quadranten $(\hat{\varrho})$ an. Die Anzahl der Punkte x_1, x_2 in V_t, wofür

$$\hat{\mu} = \hat{\alpha}_1 x_1 + \hat{\alpha}_2 x_2 \equiv \hat{\varrho} \pmod{Q} \text{ und } \hat{\mu} \text{ Primzahl},$$

asymptotisch

$$\frac{Q\sqrt{d}}{h_0(Q)\log|\eta|} \frac{V_t}{\log V_t}.$$

Anzahl der x_1, x_2 in V_t, wofür

$$N(\hat{\mu}) = F(x_1, x_2) = \text{Primzahl}$$

ist dann > 0, weil wir im Quadranten $(\hat{\varrho})$ sind), ist asymptotisch

$$\frac{Q\sqrt{d}}{h_0(Q)\log|\eta|} \cdot \varphi(Q) \frac{V_t}{\log V_t}.$$

Stelle von V_t können wir auch $z(t)$ schreiben, wenn $z(t)$ die Anzahl Gitterpunkte in V_t bedeutet.

Göttingen, April 1919.

(Eingegangen am 29. April 1919.)

Über das Schwarzsche Lemma und einige damit zusammenhängende Ungleichheitsbeziehungen der Potentialtheorie und Funktionentheorie.

Von

Paul Koebe in Jena.

Das sogenannte Schwarzsche Lemma hat in neueren Untersuchunge der konformen Abbildung vielfache Verwendung gefunden[1]), so daß mir von Interesse erschien, eine darauf bezügliche Ausarbeitung zu ve öffentlichen, in der das Wesen jener Anwendungen gesondert hervortrit

Wir werden es zunächst in § 1 mit Funktionen zu tun haben, d innerhalb des Einheitskreises ($|z| < 1$) regulär sind und in diesem B reiche nur solche Werte annehmen, deren absoluter Betrag kleiner als 1 is

In § 2 u. 3 betrachten wir dann drei Funktionenklassen:

erstens Funktionen $f(z)$, die für $|z| < 1$ regulär sind und im Nullpunk selbst den Wert 0 annehmen,

zweitens Funktionen $E(z) \equiv e^{f(z)}$, die für $|z| < 1$ regulär sind, im Nul punkte den Wert 1 annehmen und an keiner Stelle des Bereichs $|z| <$ den Wert 0 annehmen,

drittens Funktionen $F(z) \equiv z e^{f(z)}$, die für $|z| < 1$ regulär sind, fern den Bedingungen „$F(0) = 0$, $F'(0) = 1$, $F(z) \neq 0$ für $0 < |z| < 1$ genügen.

---

[1]) H. A. Schwarz, „Zur Theorie der Abbildung", Ges. Abh. Bd. II, S. 108 insb. 110–111; H. Poincaré, Acta mathematica, Bd. 4 (1884), S. 201 ff., insb. 23 C. Carathéodory, Math. Ann. Bd. 72 (1912), S. 107 ff., insb. Kap. I; Schwa Festschrift, Berlin (1914), S. 19 ff., insb. Kap. I (darin Bemerkungen von Plemelj s. auch die Zitate auf Carathéodory, Schottky, E. Lindelöf bei Landau dessen Schrift, „Darstellung und Begründung einiger neuerer Ergebnisse der Funktione theorie", Berlin 1916, S. 89 ff.; P. Koebe, Math. Ann. Bd. 69 (1910), insb. S. 47–4 „Abhandlungen zur Theorie der konformen Abbildung" I und III (Journ. f. Ma Bd. 145 (1915), insb. S. 190–192, bzw. Bd. 147 (1917), insb S. 85–87); Leipzig Berichte 1914, insb. S. 75.

Für die Funktionen $f(z)$ werden Beschränkungen des reellen Teiles
r seiner Schwankung im Kreise $|z| < 1$ der Untersuchung zugrunde
egt und daraus Beschränkungen des reellen und imaginären Teiles bzw.
en Schwankungen für $|z| \leqq \varrho < 1$ hergeleitet. Für die Funktionen
$z)$ und $F(z)$ werden Beschränkungen des absoluten Betrages oder der
plitude oder deren „Schwankungen" für $|z| < 1$ zugrunde gelegt und
schränkungen dieser Größen für $|z| \leqq \varrho$ hergeleitet.

Der durchaus elementare und geometrisch anschauliche Charakter der
zen folgenden Untersuchungen, die in allen gestellten Fragen die ge-
ien gewünschten Schranken liefern, verleiht denselben einen besonderen
z. Der figürlich erläuterte Abbildungscharakter der Extremalfunktionen
t einen Einblick in den geometrischen Mechanismus, dem die zur Ab-
ätzung gelangenden Funktionen gehorchen müssen, wenn sie mit immer
ßerer Annäherung die in den hergeleiteten Ungleichheitsbeziehungen
egebenen äußersten Schranken realisieren sollen. Diese äußersten
ranken selbst treten nur für die Extremalfunktionen ein.

Von bekannten Resultaten, die in dieser Arbeit aus dem Schwarzschen
mma hergeleitet werden, hebe ich hier drei hervor: die Schwarzsche
custangensformel, die Harnacksche Formel und die C. Neumann-
e Wertschwankungsformel der Potentialfunktionen (vgl. die Ta-
le auf S. 68—70).

Inhaltsverzeichnis.

§ 1. Das Schwarzsche Lemma.
§ 2. Reeller und imaginärer Teil (Funktionen $f(z)$).
§ 3. Absoluter Betrag und Amplitude (Funktionen $E(z)$ und $F(z)$).

§ 1.

Das Schwarzsche Lemma.

Das Schwarzsche Lemma formulieren wir unseren Zwecken ent-
echend folgendermaßen:

Schwarzsches Lemma[2]). Es sei $f(z)$ eine für $|z| < 1$ reguläre ana-
sche Funktion, die für $z = 0$ den Wert Null annimmt und sonst nur
rte annimmt, deren absoluter Betrag kleiner als 1 ist, so daß, geome-
ch gesprochen, die Werte $f(z) = w$ durch Punkte innerhalb des
Einheitskreises dargestellt werden; dann bleiben die Werte, die die
ktion $f(z)$ im Kreise $|z| \leqq \varrho < 1$ annimmt, absolut genommen $\leqq \varrho$,

[2]) Schwarz, loc. cit.[1])

so daß dieselben, geometrisch gesprochen, durch Punkte des Kreises $|w| \leqq \varrho$ der w-Ebene dargestellt werden; allgemein kann man schreiben

$$|f(z)| \leqq |z| \quad \text{für} \quad |z| < 1$$
$$|f'(0)| \leqq 1.$$

Beweis. Wir betrachten in bekannter Weise die Funktion $\frac{f(z)}{z}$, deren Wert im Nullpunkte gleich $f'(0)$ ist. Diese Funktion ist für $|z| <$ regulär. Der absolute Betrag dieser Größe erreicht für jede Kreisfläche $|z| \leqq R < 1$ das Maximum auf der Peripherie dieser Kreisfläche, ist folglich $\leqq \frac{1}{R}$. Indem man die Größe R sich unbegrenzt 1 nähern läßt, findet man die Ungleichheit

$$\left|\frac{f(z)}{z}\right| \leqq 1 \quad \text{für} \quad |z| < 1,$$

d. h. gültig für die ganze Fläche des Einheitskreises. Die gewonnene Beziehung können wir nun auch so schreiben

$$|f(z)| \leqq |z| \quad \text{für} \quad |z| < 1,$$

insbesondere also

$$|f(z)| \leqq \varrho \quad \text{für} \quad |z| \leqq \varrho$$ q. e. d.

Zusatzbemerkung zum Schwarzschen Lemma. Unter den für das Schwarzsche Lemma geltenden Voraussetzungen kann die Größe $|f(z)|$ im Kreise $|z| \leqq \varrho$ nur dann den Wert ϱ bzw. $|f'(0)|$ den Wert tatsächlich annehmen, wenn $f(z)$ die Form $f(z) = e^{i\tau} z$ hat, unter τ eine reelle Größe verstanden, so daß durch diese Funktion eine den Nullpunkt festlassende euklidische Drehung mit dem Drehwinkel τ dargestellt wird. Die Gleichung $|f(z)| = |z|$ gilt dann nicht nur für die eine erwähnte Stelle, sondern sogleich für alle z des z-Einheitskreises[3]). —

Die vorstehende Zusatzbemerkung ergibt sich, wenn man beachtet, daß unter der Annahme, die Voraussetzung der Zusatzbemerkung sei erfüllt, die Größe $\frac{f(z)}{z}$ für eine Stelle innerhalb des Einheitskreises tatsächlich den absoluten Betrag 1 hat. Da nun $\left|\frac{f(z)}{z}\right|$ im ganzen Innern des Einheitskreises $\leqq 1$ war, so muß die Größe $\frac{f(z)}{z}$ eine Konstante sein nach

[3]) Analoge Bemerkungen bezüglich des Eintretens des Gleichheitszeichens gelten bei allen in vorliegender Arbeit aufzustellenden Relationen. Das Eintreten des Gleichheitszeichens für eine einzige Stelle der Kreisfläche $|z| \leqq \varrho$ bzw. des extremalen Ableitungswertes an der Nullstelle zeigt immer an, daß eine Extremalfunktion vorliegt. Diese Extremalfunktionen selbst sind von ϱ nicht abhängig. Das Extremum tritt stets für das ganze Innere des Einheitskreises ein, nämlich für jede Stelle der durch $|z| = \varrho$ angezeigte Extremalwert.

Diese Bemerkungen seien an dieser Stelle ein für allemal gemacht.

m Satze, daß der absolute Betrag einer von einer Konstanten verschie-nen analytischen Funktion an einer regulären Stelle niemals ein Maximum nehmen kann. Wir finden also $f(z) = cz$, wobei c eine Konstante ist; d diese Konstante muß den absoluten Betrag 1 haben, weil $\left|\frac{f(z)}{z}\right|$ nach oraussetzung an einer Stelle innerhalb des Einheitskreises den Wert 1 hat.

Erweitertes Schwarzsches Lemma[4]). Es möge für $|z| < 1$ die nktion $w = \varphi(z)$ regulär sein; es sei ferner $|\varphi(z)| < 1$.

Alsdann ist

$$|\varphi(z) - \varphi(0)| < \varrho \frac{1 - |\varphi(0)|^2}{1 - |\varphi(0)|\varrho} \text{ für } |z| \leqq \varrho,$$

$$|\varphi(z) - \varphi(0)| < |z| \frac{1 - |\varphi(0)|^2}{1 - |\varphi(0)||z|} \text{ allgemein für } |z| < 1,$$

$$|\varphi'(0)| \leqq 1 - |\varphi(0)|^2.$$

Geometrisch gesprochen liegen die zu $|z| \leqq \varrho$ gehörenden Werte w einem Kreise k, der den Punkt $\varphi(0) = w_0$ umschließt. Dieser reis k wird, wenn mit $\bar{w}_0$ die zu w_0 konjugiert komplexe Größe bezeich-t wird und folglich $\frac{1}{\bar{w}_0}$ den Spiegelpunkt des Punktes w_0 am Einheits-eise analytisch darstellt, durch die Gleichung $\left|\frac{w - w_0}{w - \frac{1}{\bar{w}_0}}\right| = \varrho |w_0|$ definiert; gehört der durch die Punkte w_0 und $\frac{1}{\bar{w}_0}$ als Grundpunkte definierten perbolischen Kreisschar an, die auch den Einheitskreis enthält. Die hnittpunkte von k mit der von ihm unter rechtem Winkel getroffenen rbindungsgeraden $(0 \ldots w_0)$ haben vom Nullpunkte die Abstände

$$\frac{-\varrho + w_0}{-w_0\varrho + 1} < \frac{\varrho + w_0}{w_0\varrho + 1}, \text{ beide} < 1.$$

n Zusammenfallen eines Wertes w für $|z| \leqq \varrho$ mit einem Peripherie-nkte des Kreises k bzw. ein Zutreffen des Gleichheitszeichens findet r statt, wenn $\varphi(z)$ eine reguläre Funktion der Form $\varphi(z) = \frac{e^{i\tau}z + w_0}{\bar{w}_0 e^{i\tau}z + 1}$ reell) ist, d. h. eine solche reguläre Funktion, die die Kreisfläche $|z| \leqq 1$ f die Kreisfläche $|w| \leqq 1$ in der Weise abbildet, daß dabei dem Punkte = 0 der Punkt $w = w_0$ entspricht.

Beweis. Man transformiere die w-Einheitskreisfläche linear in der eise in sich selbst, daß dabei der Punkt w_0 in den Nullpunkt übergeht,

---

[4]) Vgl. hiermit Carathéodory, Math. Ann. loc. cit.[1]) und Koebe, Abh. III . cit.[1])

mithin aus Spiegelungsgründen der Punkt $\frac{1}{\bar{w}_0}$ in den unendlich ferne Punkt. Diese lineare Transformation lautet

$$W = -\frac{w - w_0}{\bar{w}_0 w - 1}.$$

Dabei wird, beiläufig bemerkt, die Gerade $(0 \dots w_0)$ in der Weise in sich selbst transformiert, daß die Schnittpunkte derselben mit der Peripherie des Einheitskreises einzeln in sich übergehen. Für die Funktion $W(z)$ d. i. W in Abhängigkeit von z gedacht, sind nun die Voraussetzungen des Schwarzschen Lemmas (1) erfüllt, also gilt

$$|W| \leqq \varrho \quad \text{für} \quad |z| \leqq \varrho,$$

d. h.

$$\left|\frac{w - w_0}{\bar{w}_0 w - 1}\right| \leqq \varrho \quad \text{oder} \quad \left|\frac{w - w_0}{w - \frac{1}{\bar{w}_0}}\right| \leqq \varrho\,|w_0|.$$

Die oben für $|\varphi(z) - \varphi(0)|$ im Kreise $|z| \leqq \varrho$ aufgestellte Schranke ist die Maximaldistanz der Kreislinie k vom Punkte w_0.

Zusatzbemerkung zum erweiterten Schwarzschen Lemma: Der Radius der Kreisfläche k wird unendlich klein, wenn der Punkt w_0 unbegrenzt der Peripherie des Einheitskreises angenähert wird, bei gleichzeitiger Festhaltung von ϱ.

Diese Zusatzbemerkung ergibt sich, wenn man die Durchschnittspunkte des Kreises k mit der Geraden $(0 \dots w_0)$ betrachtet, deren Abstand voneinander den Durchmesser des Kreises k darstellt. Es werden nämlich nach der Gleichung des Kreises k die Durchschnittspunkte gefunden, indem man die Strecke $\left(w_0 \dots \frac{1}{\bar{w}_0}\right)$ innen und außen im Verhältnis $\varrho\,|w_0|$ teilt. Bei dem erwähnten Grenzübergang rücken aber die Punkte w_0 und $\frac{1}{\bar{w}_0}$ zusammen.

Ebenfalls ergibt sich die Zusatzbemerkung sofort an Hand der oben für $|\varphi(z) - \varphi(0)|$ angegebenen ersten Schranke.

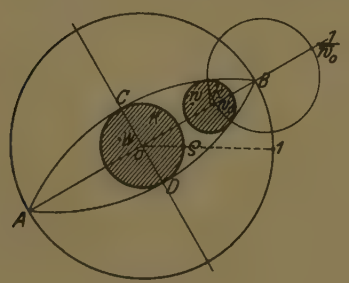


Fig. 1.

Zur Veranschaulichung dient eine Konstruktion des Kreises k, die in Fig. 1 angegeben ist. Der Punkt $\frac{1}{\bar{w}_0}$ ist nach dem Prinzip der reziproken Radien aus dem Punkt w_0 gefunden. Die oben betrachtete lineare Transformation $w(W)$ führt den Kreis K, $(|W| = \varrho)$, in den Kreis k über, ferner $W = 0$ in w_0, die Gerade DOC in den Kreis w_0, $\frac{1}{\bar{w}_0}$. Die

nkte A und B bleiben fest, und die Kreisbögen ACB und ADB gehen zeln in sich über. Der Kreis k schneidet diese Kreisbögen unter rechtem nkel.

Die vorstehende Konstruktion läßt in der Tat auch sofort erkennen, ß, bei Annäherung des Punktes w_0 an die Peripherie des Einheitskreises B. an den Punkt B) unter Festhaltung von ϱ, der Kreis k sich auf en Punkt zusammenzieht, nämlich den Punkt B, indem er mit dem eisbogenzweieck $ACBDA$ beständig Berührung eingeht.

Annäherung der Funktion $f(z)$ an die Extremalfunktion $) = z$ [5]). Es werde mit M_ϱ das Maximum des absoluten Betrages der nktion $f(z)$ auf dem Kreise $|z| = \varrho$ bezeichnet. Die Größe M_ϱ stellt nn zugleich das Maximum des absoluten Betrages von $f(z)$ im ganzen eise $|z| \leqq \varrho$ dar. Von der Funktion $f(z)$ werde wie bisher angenommen: $0) = 0$, $|f(z)| < 1$ und regulär für $|z| < 1$.

Es soll jetzt der Grad der Annäherung der Funktion $f(z)$ an die ngemäß als Extremalfunktion zu bezeichnende Funktion $f(z) = z$ unterht werden, wie derselbe durch die Vorgabe von M_ϱ bestimmt wird. ese Annäherung soll für eine beliebige andere, insbesondere auch größere, k_R bezeichnete Kreisfläche $|z| \leqq R < 1$ ermittelt werden.

Wir betrachten zu dem Zwecke die Funktion

$$\varphi(z) = \frac{f(z)}{z}.$$

ese ist innerhalb des Einheitskreises regulär und dem absoluten Betrage er Werte nach < 1. Es ist ferner $\varphi(0) = f'(0)$. Es handelt sich nun entlich darum, die gleichmäßige Annäherung der Funktion $\varphi(z)$ an 1 melmäßig darzustellen, nämlich durch die Größen q und R, wenn

$$M_\varrho = q \cdot \varrho$$

etzt wird, wobei dann q als eine positive Größe unterhalb 1 zu bechten ist, die sich bei fest zu denkendem ϱ und R dem Werte 1 nähert.

Die Werte $\varphi(z)$ für $|z| \leqq R$ liegen nach dem erweiterten Schwarzschen nma in einem Kreise k'_R, der den Punkt $\varphi(0) = f'(0)$ und auch einen nkt im Abstande $\frac{M_\varrho}{\varrho} = q$ vom Nullpunkte in seinem Innern enthalten ß. Wird der Kreis k_R durch die lineare Transformation mit der nktezuordnung $(-1, -R, +1)$, $(-1, 0, +1)$ in einen Kreis k' spezieller ge verwandelt, so findet man als Schnittpunkt desselben mit der Achse Reellen den Bildpunkt des Punktes R, nämlich den Punkt $\frac{2R}{1+R^2}$. mmt man nun

[5]) Vgl. hiermit ähnliche Entwicklungen bei Carathéodory (Math. Ann. l. c.[1])).

(*) $$q > \frac{2R}{1+R^2}$$

an, so kann der Kreis k_R' den Nullpunkt nicht in seinem Innern enthalten und man hat dann notwendig wegen $\varphi(0) = f'(0)$

$$|f'(0)| > 0.$$

Indem wir unsere Betrachtung nunmehr auf solche Funktionen $f(z)$ beschränken, für die $q > \frac{2R}{1+R^2}$ ist, sind wir in der Lage, dieselben durch Drehung der Funktionsebene so zu normieren, daß $f'(0)$ *reell positiv* wird.

Der Kreis k_R' hat jetzt seinen Mittelpunkt auf der Achse des Reellen, nämlich im Punkte $f'(0)$. Um die Annäherung der Fläche k_R' an den Einheitspunkt abzuschätzen, brauchen wir offenbar nur die Entfernung des linken Schnittpunktes der Kreislinie k_R' mit der Achse des Reellen vom Punkte 1 abzuschätzen oder dessen Entfernung vom Nullpunkte selbst. Letztere aber ist mit Rücksicht darauf, daß die Kreisfläche k_R' einen Punkt im Abstande q vom Nullpunkte enthält, jedenfalls größer als die entsprechende Distanz des Kreises k' derjenigen Speziallage, die durch die lineare Transformation mit der Punktezuordnung $(-1, R, 1), (-1, q, +1)$ aus k_R gewonnen wird. Diese fragliche Distanz hat aber einen Wert, der sich aus der definierten linearen Transformation als zugeordneter Wert des Wertes $-R$ ergibt, nämlich

$$h(q, R) = \frac{(1+q)(1-R)^2 - (1-q)(1+R)^2}{(1+q)(1-R)^2 + (1-q)(1+R)^2}.$$

Wir finden also durch Berechnung von $1 - h(q, R)$

(*) $$\left|\frac{f(z)}{z} - 1\right| < \frac{2(1-q)(1+R)^2}{(1+q)(1-R)^2 + (1-q)(1+R)^2} \quad \text{für} \quad |z| \leqq R.$$

Diese Formel läßt die gleichmäßige Konvergenz der Größe $\frac{f(z)}{z}$ gegen 1 bei gegen 1 zunehmendem q sofort erkennen. Nach derselben wird

(*) $$\left|\frac{f(z)}{z} - 1\right| < \varepsilon \quad \text{für} \quad |r| \leqq R,$$

wenn

(*) $$q > \frac{(1+R^2)\varepsilon - (1+R)^2}{2R\varepsilon - (1+R)^2}$$

ist.

Man erreicht ferner, daß das Bild der Kreisfläche k_R, das die Funktion $f(z)$ entwirft, sich seinerseits *nirgends mehrfach bedeckt*, indem man dafür Sorge trägt, daß im Kreise $|z| \leqq \sqrt{R}$ die Größe $\left|\frac{f(z)}{z}\right| > \sqrt{R}$ wird, d.

$$h(q, \sqrt{R}) > \sqrt{R},$$

also

(*) $$q > \frac{3+R}{1+3R}\sqrt{R}.$$

Durch Erfüllung dieser Bedingung wird nämlich erreicht, daß die nze Kreisfläche $|w| \leqq R$ als schlichtes Teilgebiet in dem Bildbereiche r Kreisfläche $|z| \leqq \sqrt{R}$ enthalten ist.

Statt die Annäherung der Funktion $f(z)$ an die Grenzfunktion $f(z) = z$ M_ϱ bzw. q zu messen, können wir dieselbe auch durch die positiv reell rmiert zu denkende Größe $f'(0)$ messen, in die q übergeht, wenn man h ϱ unendlich klein werdend denkt. Es ergeben sich so Formeln, die s den angeschriebenen Formeln (*) durch Ersetzung der Größe q durch 0) hervorgehen, Formeln, die auch direkt durch unsere oben mit Bezug f q geführte Betrachtungen geliefert werden, da $f'(0) = \varphi(0)$, wie oben merkt wurde, durch einen Punkt innerhalb des Kreises k' dargestellt rd. Nimmt man z. B.

$$f'(0) > \frac{2R}{1+R^2}$$

so ist man sicher, daß die Funktion $f(z)$ im Kreise $|z| \leqq R$ nur an Nullstelle den Wert null annimmt[6]).

§ 2.

Reeller und imaginärer Teil[7]). (Funktionen $f(z)$).

I. Es sei $f(z) = w = u + iv$ für $|z| < 1$ regulär, $f(0) = 0$, ferner $u < a$[8]), er a eine positive reelle Größe verstanden. Alsdann gelten für das Gebiet $\leqq \varrho$ die Ungleichheitsbeziehungen

$$-\frac{2a\varrho}{1-\varrho} \leqq u \leqq \frac{2a\varrho}{1+\varrho}, \qquad |v| \leqq \frac{2a\varrho}{1-\varrho^2},$$

$$|f'(0)| \equiv |\operatorname{grad} u|_{z=0} \equiv |\operatorname{grad} v|_{z=0} \leqq 2a\ ^{9}).$$

s Gleichheitszeichen tritt nur für die *Extremalfunktionen* ein

$$f^I(e^{i\tau}z), \qquad f^I(z) = \frac{2az}{1+z},$$

---

[6]) Analoge Bemerkungen ergeben sich bezüglich der Annäherung der in § 2 3 behandelten Funktionen $f(z)$, $E(z)$, $F(z)$ an die entsprechenden Extremalktionen. Insbesondere kann die gleichmäßige Annäherung an diese Extremalktionen auch durch Annäherung des Wertes $f'(0)$ bzw. $E'(0)$, $F''(0)$ an den eiligen unten angegebenen Extremalwert bewirkt werden.

[7]) S. die am Schlusse dieses Paragraphen befindliche tabellarische Übersicht und dort gegebenen Zitate.

[8]) Vgl. ähnliche Entwicklungen von Carathéodory bei Landau loc. cit. [1]).

[9]) Bekanntlich ist grad u, gesprochen „Gradient von u", der Vektor mit den Komenten $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$; seine Längenmaßzahl, d. h. $|\operatorname{grad} u|$ ist gleich

$$\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2} = |f'(z)|.$$

d. i. für diejenigen Funktionen, die das Innere des z-Einheitskreises ein eindeutig auf die Halbebene $\Re(w) \leqq a$ unter Festhaltung des Nullpunkte konform abbilden.

Zum Beweise hat man nur nötig, die erwähnte w-Halbebene durch die lineare Transformation

$$w = \frac{2aW}{W+1}$$

konform auf das Innere des W-Einheitskreises in der Weise abzubilden daß den Punkten $W = (-1, 0, +1)$ der Reihe nach die Punkte $w = (\infty, 0, a$ entsprechen. Auf die Funktion $W(z)$ wird dann das Schwarzsche Lemma anwendbar. Dem Kreise $|W| = \varrho$, (Kreis K), entspricht in der w-Ebene

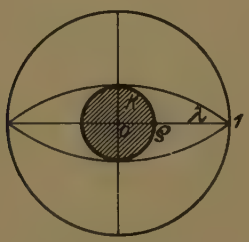


Fig. 2a.

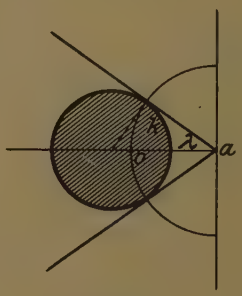


Fig. 2b.

ein Kreis k, der die Achse des Reellen in den Punkten $w_1 = \frac{2a\varrho}{1+\varrho}$ und $w_2 = \frac{-2a\varrho}{1-\varrho}$ schneidet, also die Radienlänge $\frac{2a\varrho}{1-\varrho^2}$ besitzt. (Vgl. Fig. 2a und 2b, aus denen auch die Konstruktion des Kreises k ersichtlich ist.

Ia. Es sei für $|z| < 1$ eine reguläre positive Potentialfunktion u erklärt. Ist u_0 der Wert derselben im Punkte $z = 0$, so gelten für ihre Werte u und die Werte v der im Nullpunkte verschwindend zu denkenden konjugierten Potentialfunktion v für die Kreisfläche $|z| \leqq \varrho$ die Ungleichheiten

$$u_0 \frac{1-\varrho}{1+\varrho} \leqq u \leqq u_0 \frac{1+\varrho}{1-\varrho}\ ^{10}),$$

$$|v| \leqq \frac{2u_0\varrho}{1-\varrho^2} \quad \text{für} \quad |z| \leqq \varrho,$$

$$|\operatorname{grad} u|_{z=0} \equiv |\operatorname{grad} v|_{z=0} \leqq 2u_0.$$

[10]) Diese Formel drückt den bekannten Harnackschen Satz für positive Potentialfunktionen aus, einen Satz, den man nach Harnack aus dem Poissonschen Integral folgert.

s Gleichheitszeichen tritt nur ein für die *Extremalpotentialfunktionen*

$$u = u_0 \Re\left(\frac{1+e^{i\tau}z}{1-e^{i\tau}z}\right),$$

bei $\frac{1+e^{i\tau}z}{1-e^{i\tau}z}$ die allgemeinste lineare Funktion darstellt, die die Fläche Einheitskreises in der Weise auf die Halbebene zur Rechten der Achse Imaginären abbildet, daß dabei der Nullpunkt in den Punkt u_0 übergeht.

Die vorstehenden Formeln ergeben sich wie die Formeln von I, wenn n vermittelst der Substitution

$$w = u_0 \frac{1+W}{1-W}$$

w-Halbebene ($w = u + iv$) rechts der Achse des Imaginären auf die che des W-Einheitskreises so abbildet, daß den Punkten $w = (0, u_0, \infty)$ Reihe nach die Punkte $W = (-1, 0, +1)$ entsprechen. Dem Kreise $|| = \varrho$, (K), entspricht ein Kreis k in der w-Ebene, dessen Schnittkte mit der Achse des Reellen durch Einsetzung von $W = \pm\varrho$ in den sdruck für w gefunden werden. Damit sind dann unmittelbar die angebenen Harnackschen Schranken für u und die Schranke für $|v|$ bent, letztere wieder als halbe Differenz der u-Schranken.

II. Es sei $w = f(z) = u + iv$ für $|z| < 1$ regulär, $f(0) = 0$, $|u| < a$, bei mit a eine positive reelle Größe bezeichnet ist; dann ist im Kreise $\leqq \varrho$

$$|u| \leqq \frac{4a}{\pi} \operatorname{arc\,tg} \varrho \text{ [11])}, \qquad |v| \leqq \frac{2a}{\pi} \log \frac{1+\varrho}{1-\varrho} \text{ [12])},$$

$$|f'(0)| \equiv |\operatorname{grad} u|_{z=0} \equiv |\operatorname{grad} v|_{z=0} \leqq \frac{4a}{\pi}.$$

Das Gleichheitszeichen tritt nur ein für die *Extremalfunktionen*

$$f^{II}(e^{i\tau}z), \qquad f^{II}(z) = \frac{4a}{\pi} \operatorname{arc\,tg}(z),$$

die konformen Abbildungen des z-Einheitskreises auf den Parallelstreifen $\leqq a$ mit der Nebenbedingung $f(0) = 0$ analytisch darstellen.

Zum Beweise hat man die Hilfsabbildung

$$w = \frac{4a}{\pi} \operatorname{arc\,tg} W = \frac{2a}{\pi i} \log\left(\frac{i-z}{i+z}\right)$$

---

[11]) Zuerst von Schwarz aus dem Poissonschen Integral gefolgert (Gesammelte rke Bd. II, S. 190, Fußnote).

[12]) Von mir bereits in der angegebenen Weise hergeleitet in der Abhandlung I. cit. [1]). (Vgl. auch eine diesbezügliche Bemerkung von mir am Ende meines Ar- ls in den Leipziger Berichten loc. cit. [1]) (1914).) Siehe ferner Plemelj bei athéodory (Schwarz-Festschrift loc. cit. [1])).

des w-Parallelstreifens auf die W-Einheitskreisfläche auszuführen und auf die Funktion $W(z)$ das Schwarzsche Lemma zur Anwendung zu bringen. Dem Kreise $|W| = \varrho$, (Kreis K), entspricht innerhalb des Parallelstreifens eine in bezug auf das Koordinatensystem zu sich selbst symmetrische *konvexe* geschlossene Kurve k, deren äußerster Punkt rechts auf der Achse des Reellen liegt und vom Nullpunkt die Entfernung $\frac{4a}{\pi} \operatorname{arc\,tg} \varrho$ hat, während der höchste und tiefste Punkt auf der Achse des Imaginären in

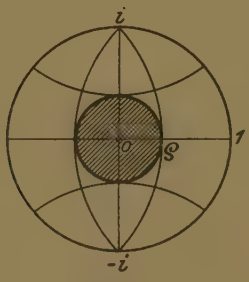


Fig. 3a.

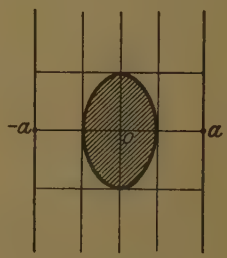


Fig. 3b.

der Entfernung $\frac{2a}{\pi} \log \frac{1+\varrho}{1-\varrho}$ vom Nullpunkt liegt. Die Konvexität der erwähnten Kurve ergibt sich aus dem Abbildungscharakter der Funktion Arcustangens. Diese Funktion läßt nämlich den Kreisbögen, die die Punkte $\pm i$ miteinander verbinden, gerade Linien parallel der Achse des Imaginären entsprechen, und zwar ist der Abstand je zweier dieser Geraden gleich dem halben Winkel zwischen den entsprechenden Kreisbögen. Andererseits entsprechen den Kreisen der durch $\pm i$ als Grundpunkte bestimmten hyperbolischen Kreisschar die geraden Linien parallel der Achse des Reellen. Diejenigen Kreisbögen von $+i$ nach $-i$, die den Kreis $|W| = \varrho$ treffen, treffen ihn, wie eine den einen der Grundpunkte ins Unendliche schaffende lineare Hilfstransformation sofort lehrt, unter Winkeln, die von 0 bis $\frac{\pi}{2}$ monoton zunehmen und wieder nach 0 monoton abnehmen. Vgl. Fig. 3a und 3b.

Bemerkung. Die Breite der Kurve k ist immer kleiner als die Höhe derselben. Man hat in der Tat

$$\text{für } 0 < \varrho < 1 \qquad \frac{4a}{\pi} \operatorname{arc\,tg} \varrho < \frac{2a}{\pi} \log \frac{1+\varrho}{1-\varrho},$$

da beide zur Vergleichung gelangenden Größen für $\varrho = 0$ verschwinden und für die Differentialquotienten derselben die Ungleichheit besteht:

$$\frac{4a}{\pi(1+\varrho^2)} < \frac{4a}{\pi(1-\varrho^2)}.$$

III. Es sei $w = f(z) = u + iv$ regulär für $|z| < 1$, $f(0) = 0$; ferner der reelle Teil u der Beschränkung unterworfen

$$-a_2 < u < +a_1,$$

er a_1 und a_2 positiv reelle Größen verstanden. Alsdann gelten für $\leqq \varrho$ die folgenden Ungleichheits-Beziehungen:

$$\frac{2(a_1+a_2)}{\pi} \operatorname{arc\,tg} W_2 + \frac{a_1-a_2}{2} \leqq u \leqq \frac{2(a_1+a_2)}{\pi} \operatorname{arc\,tg} W_1 + \frac{a_1-a_2}{2},$$

ei

$$W_{1\,2} = \frac{\pm\varrho + W_0}{\pm W_0\varrho + 1}, \qquad W_0 = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}\frac{a_2-a_1}{a_1+a_2}\right);$$

er

$$|v| \leqq \frac{a_1+a_2}{\pi} \log \operatorname{tg}\left\{\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \operatorname{arc\,tg}\left[\frac{2\varrho}{1-\varrho^2}\cos\left(\frac{\pi}{2}\frac{a_1-a_2}{a_1+a_2}\right)\right]\right\};$$

$$|f'(0)| \equiv |\operatorname{grad} u|_{z=0} \equiv |\operatorname{grad} v|_{z=0} \leqq \frac{2(a_1+a_2)}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{2}\frac{a_2-a_1}{a_1+a_2}\right);$$

zwar wird das Gleichheitszeichen nur für die *Extremalfunktionen*

$$f^{III}(e^{ir}z), \quad f^{III}(z) = \frac{2(a_1+a_2)}{\pi} \operatorname{arc\,tg}\frac{z+W_0}{W_0 z+1} + \frac{a_1-a_2}{2}$$

icht, die die Abbildungen der Fläche des z-Einheitskreises unter Festung des Nullpunktes auf den Parallelstreifen $-a_2 \leqq u \leqq +a_1$ leisten. –

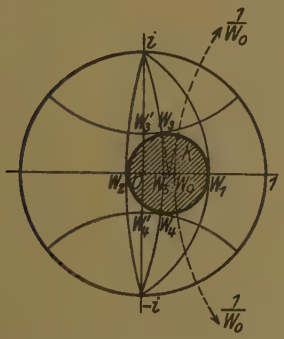


Fig. 4a.

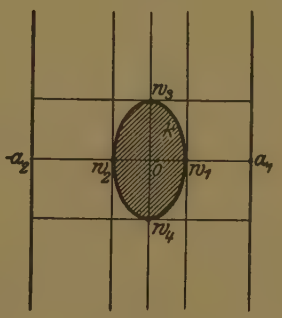


Fig. 4b.

Zum Beweise ziehen wir die Hilfsabbildung des erwähnten Parallelfens der w-Ebene auf die Fläche des W-Einheitskreises (s. Fig. 4a 4b) heran, die durch die Funktion

$$w = \frac{2(a_1+a_2)}{\pi} \operatorname{arc\,tg} W + \frac{a_1-a_2}{2}$$

estellt wird. Bei dieser Abbildung entspricht dem Nullpunkte der bene der Punkt

$$W_0 = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}\frac{a_2-a_1}{a_1+a_2}\right).$$

Auf die Funktion $W(z)$ findet jetzt das „erweiterte Schwarzsche Lemma“ Anwendung. Darnach erscheint die Größe W auf eine Kreisfläche K beschränkt, deren äußerster Punkt rechts, W_1, und deren äußerster Punkt links W_2, durch die Formeln bestimmt werden

$$W_1 = \frac{\varrho + W_0}{W_0 \varrho + 1}, \qquad W_2 = \frac{-\varrho + W_0}{-W_0 \varrho + 1}.$$

Die Kreisfläche K erscheint daher eingeschlossen in das Kreisbogenzweieck, das von den beiden Kreisbögen $(+i, W_1, -i)$ und $(+i, W_2, -i)$ gebildet wird. Diesem Zweieck entspricht in der w-Ebene ein Parallelstreifen, der die dem Kreise K entsprechende Kurve k vollständig enthält. Wir finden so zunächst die oben angegebenen Schranken für u.

Um die Schranken für v zu finden, bemerken wir zunächst, daß die Kurve k *eine konvexe Mittelpunktskurve* ist, die in bezug auf die Achse des Reellen und die dazu senkrechte, durch den Mittelpunkt von k gehende Gerade symmetrisch ist. Diese Eigenschaften ergeben sich sofort aus der Betrachtung des Kreises K in Beziehung zur Achse des Reellen einerseits und den Kreisbögen des elliptischen Kreisbüschels mit den Grundpunkten $\pm i$ andererseits. Der Halbierungsbogen des obenerwähnten Kreisbogenzweiecks insbesondere trifft den Kreis K unter rechtem Winkel, so daß K durch Spiegelung an diesem Bogen in sich selbst übergeht. Die Schnittpunkte des Halbierungsbogens mit K mögen mit W_3 und W_4 bezeichnet werden. Es ist dann klar, daß den Punkten W_3 und W_4 in der w-Ebene der höchste und tiefste Punkt der konvexen Kurve k entsprechen. Die erwähnte Konvexität der Kurve k ist ihrerseits eine Folge des Umstandes, daß die Bögen des erwähnten elliptischen Kreisbüschels den Kreis K unter monoton von 0 bis $\frac{\pi}{2}$ wachsenden und wieder abnehmenden Winkeln schneiden, wie bei einer linearen Transformation des elliptischen Büschels in ein Geradenbüschel sofort ersichtlich wird.

Um die zu W_3 und W_4 gehörenden entgegengesetzt gleichen v-Werte zu ermitteln, beachten wir, daß die Größe v für die Hilfstransformation $w(W)$ einen konstanten Wert erhält längs jedes Kreises der durch $\pm i$ bestimmten hyperbolischen Kreisschar; ferner, daß diese Kreise durch die elliptischen Substitutionen mit den Fixpunkten $\pm i$ einzeln in sich verschoben werden; schließlich, daß die scheinbare Entfernung je zweier Punkte der Achse des Reellen, von $\pm i$ aus gesehen, bei diesen elliptischen Drehungen unverändert bleibt, weil diese scheinbare Entfernung gleich dem halben Winkel ist, den die durch jene Punkte und $\pm i$ gehenden Kreisbögen miteinander bilden.

Wir ziehen nun diejenige dieser elliptischen Substitutionen in Betracht, die den Bogen $(i, W_3, W_4, -i)$ in ein Stück $(i, W_3', W_4', -i)$ der Achse

Imaginären und den Kreis K mit den Punkten W_1, W_2, W_3, W_4 in mit den Punkten W_1' und W_2' auf der Achse des Reellen und W_3', W_4' der Achse des Imaginären überführt. Es ergibt sich dann

$$W_{1,2}' = \pm \operatorname{tg}\left\{\frac{\operatorname{arc\,tg} W_1 - \operatorname{arc\,tg} W_2}{2}\right\}, \quad W_{3,4}' = \pm i \operatorname{tg}\{\ldots\}.$$

n ist

$$\{\ldots\} = \frac{1}{2} \operatorname{arc\,tg} \frac{W_1 - W_2}{1 + W_1 W_2},$$

$$\frac{W_1 - W_2}{1 + W_1 W_2} = \frac{2\varrho}{1-\varrho^2} \frac{1 - W_0^2}{1 + W_0^2},$$

wegen

$$W_0 = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} \frac{a_2 - a_1}{a_1 + a_2}\right)$$

$$\frac{W_1 - W_2}{1 + W_1 W_2} = \frac{2\varrho}{1-\varrho^2} \cos 2() = \frac{2\varrho}{1-\varrho^2} \cos\left(\frac{\pi}{2} \frac{a_1 - a_2}{a_1 + a_2}\right),$$

$$W_{1,2}' = \pm \operatorname{tg}\left\{\frac{1}{2} \operatorname{arc\,tg}\left[\frac{2\varrho}{1-\varrho^2} \cos\left(\frac{\pi}{2} \frac{a_1 - a_2}{a_1 + a_2}\right)\right]\right\},$$

$$W_{3,4}' = \pm i \operatorname{tg}\{\}.$$

gesuchten Größen v ergeben sich nun, wenn man zu W_3' und W_4' die ehörigen Werte w_3' und w_4' ermittelt und deren imaginäre Teile iv_3' $iv_4' = -iv_3'$ durch i dividiert.

Es ist aber

$$w_3' = \frac{2(a_1 + a_2)}{\pi} \operatorname{arc\,tg} W_3' + \frac{a_1 - a_2}{2},$$

$$v_3' = \pm \frac{2(a_1 + a_2)}{\pi} \frac{1}{2} \log \frac{1 + |W_3'|}{1 - |W_3'|}$$

$$= \frac{a_1 + a_2}{\pi} \log \frac{1 + \operatorname{tg}\{\}}{1 - \operatorname{tg}\{\}}$$

$$= \frac{a_1 + a_2}{\pi} \log \operatorname{tg}\left\{\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \operatorname{arc\,tg}\left[\frac{2\varrho}{1-\varrho^2} \cos\left(\frac{\pi}{2} \frac{a_1 - a_2}{a_1 + a_2}\right)\right]\right\}.$$

Über Lage und Form des Ovals k machen wir noch folgende zwei erkungen.

IIIa. (Zusatzbemerkung.) Der Mittelpunkt des Ovals k liegt zur hten oder Linken vom Nullpunkt, je nachdem $a_2 \gtrless a_1$ ist.

IIIb. (Zusatzbemerkung.) Die Höhe des Ovals k ist größer als die te des Ovals.

Die erste Bemerkung ergibt sich, wenn man beachtet, daß der Mittelt des Ovals k als Bild in der W-Ebene den Schnittpunkt W_5 des ens $(i, W_3, W_4, -i)$ mit der Achse des Reellen hat. Man beachte daß der Mittelpunkt M des Kreises K zwischen W_0 und W_5 liegt

(s. Fig. 4b), so daß man auf der Strecke $(0 \ldots W_0)$ die Anordnung $(0, W_5, M, W_0)$, mithin die Anordnung $(0, W_5, W_0)$ hat.

Der Beweis von IIIb kommt darauf hinaus, zu zeigen, daß

$$\operatorname{arc\,tg} W_1 - \operatorname{arc\,tg} W_2 < \log \operatorname{tg} \left\{ \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \operatorname{arc\,tg} \left[\frac{2\varrho}{1-\varrho^2} \cos\left(\frac{\pi}{2} \frac{a_1 - a_2}{a_1 + a_2} \right) \right] \right\}$$

ist. Es ist

$$\operatorname{arc\,tg} W_1 - \operatorname{arc\,tg} W_2 = \operatorname{arc\,tg} \left[\frac{2\varrho}{1-\varrho^2} \cos\left(\frac{\pi}{2} \frac{a_1 - a_2}{a_1 + a_2} \right) \right].$$

Wird letztere Größe mit γ bezeichnet, so hat man $0 < \gamma < \frac{\pi}{2}$, und es wäre zu zeigen, daß für alle solche γ

$$\gamma < \log \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\gamma}{2} \right)$$

ist. Für $\gamma = 0$ sind beide zur Vergleichung stehenden Größen gleich 0. Im übrigen hat man durch Differentiation nach γ auf der linken und rechten Seite die Ableitungen

$$1 \quad \text{bzw.} \quad \frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \gamma \right)} > 1.$$

Bemerkung. Wir überzeugen uns schließlich noch davon, daß für $a_1 = a_2 = a$ die angegebenen Schranken für u und v in die unter I angegebenen Schranken übergehen.

In der Tat wird in diesem Falle $W_0 = 0$, $W_1 = \varrho$, $W_2 = -\varrho$, so daß für u als obere und untere Schranke $\pm \frac{4a}{\pi} \operatorname{arc\,tg} \varrho$ gefunden werden.

Andererseits ergeben sich für v die Schranken

$$\pm \frac{2a}{\pi} \log \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \operatorname{arc\,tg} \frac{2\varrho}{1-\varrho^2} \right),$$

d. i. wegen

$$\operatorname{arc\,tg} \frac{2\varrho}{1-\varrho^2} = 2 \operatorname{arc\,tg} \varrho$$

$$\pm \frac{2a}{\pi} \log \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \operatorname{arc\,tg} \varrho \right) = \pm \frac{2a}{\pi} \log \frac{1+\varrho}{1-\varrho}.$$

IV. Es sei $w = f(z) = u + iv$ für $|z| < 1$ regulär, $f(0) = 0$; ferner sei die *Schwankung* $D_1(u)$ des reellen Teiles u (obere Grenze minus untere Grenze der Werte u im Kreise $|z| < 1$) $\leqq \Delta$. Alsdann gelten in der Kreisfläche $|z| \leqq \varrho$ für die Größen u und v und deren Schwankungen $D_\varrho(u)$ und $D_\varrho(v)$ in demselben Kreise die Ungleichheitsbeziehungen

$$|u| \leqq \frac{2\Delta}{\pi} \operatorname{arc\,tg} \varrho, \qquad |v| \leqq \frac{\Delta}{\pi} \log \frac{1+\varrho}{1-\varrho},$$

$$D_\varrho(u) \leqq \frac{4\Delta}{\pi} \operatorname{arc\,tg}\varrho\ ^{13}), \qquad D_\varrho(v) \leqq \frac{2\Delta}{\pi} \log\frac{1+\varrho}{1-\varrho};$$

$$|f'(0)| \equiv |\operatorname{grad} u|_{z=0} \equiv |\operatorname{grad} v|_{z=0} \leqq \frac{2\Delta}{\pi}$$

es treten die Gleichheitszeichen nur für die *Extremalfunktionen*

$$f^{IV}(e^{i\tau}z), \quad f^{IV}(z) = \frac{2\Delta}{\pi} \operatorname{arc\,tg}(z) \equiv (f^{II}(z))_{2a=\Delta}$$

die eine den Nullpunkt fest lassende konforme Abbildung der Kreis-
e $|z| \leqq 1$ auf das schlichte vollständige Innere des Parallelstreifens
$\leqq \frac{\Delta}{2}$ leisten.

Zum Beweise können wir ausgehen von dem Ergebnis (III). Es kommt
ıbar nur darauf an, die größtmöglichen Werte der in (III) bestimmten
anken zu ermitteln, wenn man $a_1 + a_2$ den festen Wert Δ erteilt und
ibrigen a_1 alle Werte zwischen Δ und 0 erteilt, Δ und 0 selbst aus-
ılossen. Diese Variation bedeutet, daß man der Größe $a_2 - a_1$ alle
:e zwischen $-\Delta$ und Δ erteilt, $\pm\Delta$ selbst ausgeschlossen.

Aus Symmetriegründen genügt es, die Größe $a_2 - a_1$ von 0 bis Δ
eren zu lassen, Δ selbst ausgeschlossen. Bei dieser Variation variiert
Größe W_0 monoton von 0 bis 1, die Größe W_1 monoton von ϱ bis 1,
Größe W_2 monoton von $-\varrho$ bis 1, die Größe w_1 monoton von
rc tg ϱ bis 0, die Größe w_2 monoton von $-\frac{2\Delta}{\pi}$ arc tg ϱ bis 0; weiter
Größe v_3' (S. 65) monoton von $\frac{\Delta}{\pi}\log\frac{1+\varrho}{1-\varrho}$ bis 0, entsprechend die
e v_4' monoton von $-\frac{\Delta}{\pi}\log\frac{1+\varrho}{1-\varrho}$ bis 0. Als Schranken für die Größen
) und $D_\varrho(v)$ ergeben sich $w_1 - w_2$ bzw. $v_3' - v_4'$; auch sie haben nun
monotones Verhalten. Als Resultat findet sich somit die oben an-
ene Beziehung.

Unmittelbare Gewinnung von (IV). Zur Gewinnung der in (IV)
gebenen Schranken ist es übrigens nicht notwendig, die unter (III)
stellten allgemeinen Ausdrücke der Schranken für u und v heran-
hen, vielmehr kann man die gefundenen Formeln auch direkt der
4a entnehmen, indem man bemerkt, daß bei der zu betrachtenden
tion der Kreis K zwischen zwei von ihm ständig berührten, die
te ± 1 verbindenden Kreisbögen wandert. Dabei nimmt offenbar
cheinbare Größe seines in der Achse des Reellen liegenden Durch-
ers, von den Punkten $\pm i$ gesehen, mit zunehmender Entfernung aus

[13]) Formel von C. Neumann; s. dessen „Vorlesungen über Riemanns Theorie
belschen Integrale“ (1884), S. 415. Eine Verallgemeinerung der Neumann-
Formel für Funktionen in mehrfach zusammenhängenden Bereichen entwickelt
hottky im Journ. f. Math. 117 (1897), S. 225–253.

der Mittellage ab. Ebenso werden offenbar die beiden Kreise der hyperbolischen Kreisschar mit den Grundpunkten $\pm i$, die den Kreis K oben bzw. unten berühren, mehr und mehr zusammenrücken gegen die Grenzlage, die durch die Achse des Reellen selbst gebildet wird. Hat K die Mittellage, d. h. seinen Mittelpunkt im Nullpunkte, so erreichen jene beiden Berührungskreise ihre weiteste Entfernung voneinander, $v_3' - v_4'$ also seinen größten Wert.

Wir lassen eine Zusammenstellung der in diesem Paragraphen gewonnenen Hauptergebnisse folgen.

Tabellarische Übersicht zu § 2.

(„Reeller und imaginärer Teil".)

Allgemein sei für $|z| < 1$ $f(z)$ regulär, $f(0) = 0$; dann gelten unter den im folgenden angegebenen weiteren Voraussetzungen die Beziehungen:

I. Es sei

$$\Re\{f(z)\} < a, \quad (a > 0), \quad \text{für } |z| < 1.$$

Dann ist

$$\left.\begin{aligned} \frac{-2a\varrho}{1-\varrho} \leqq \{\Re f(z)\} \leqq \frac{2a\varrho}{1+\varrho} \text{ ((Harnack))}, \\ |\Im\{f(z)\}| \leqq \frac{2a\varrho}{1-\varrho^2}\ ^{14}) \end{aligned}\right\} \text{ für } |z| \leqq \varrho < 1.$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{-2a|z|}{1-|z|} \leqq \Re\{f(z)\} \leqq \frac{2a|z|}{1+|z|} \\ |\Im\{f(z)\}| \leqq \frac{2a|z|}{1-|z|^2} \end{aligned}\right\} \text{ für } |z| < 1$$

$$|f'(0)| \leqq 2a.$$

Extremalfunktionen: $f^I(e^{i\tau}z)$, $f^I(z) = \frac{2az}{1+z}$, τ beliebig reell,

(Abbildungen der Kreisfläche $|z| < 1$ auf die Halbebene $\Re(w) < a$, $(w = u + iv)$.

II. Es sei

$$|\Re\{f(z)\}| < a, \quad (a > 0), \quad \text{für } |z| < 1.$$

Dann ist

$$\left.\begin{aligned} |\Re\{f(z)\}| \leqq \frac{4a}{\pi} \operatorname{arc\,tg} \varrho\ ^{15}) \text{ (Schwarz)} \\ |\Im\{f(z)\}| \leqq \frac{2a}{\pi} \log \frac{1+\varrho}{1-\varrho}\ ^{16}) \end{aligned}\right\} \text{ für } |z| \leqq \varrho < 1.$$

---

[14]) Das Zeichen $\Re$ soll bedeuten „reeller Teil von", das Zeichen $\Im$ soll bedeuten „Komponente des imaginären Teiles von"; es ist also das Zeichen $\Im(\alpha)$ gleichbedeutend mit dem Zeichen $\Re\left\{\frac{\alpha}{i}\right\}$.

[15]) Ges. Abh. Bd. II, S. 361.

[16]) S. Fußnote [12]), S. 61.

$$\left.\begin{aligned} |\Re\{f(z)\}| &\leqq \frac{4a}{\pi} \operatorname{arc\,tg} |z| \\ |\Im\{f(z)\}| &\leqq \frac{2a}{\pi} \log \frac{1+|z|}{1-|z|} \end{aligned}\right\} \text{ für } |z|<1$$

$$|f'(0)| \leqq \frac{4a}{\pi}.$$

Extremalfunktionen: $f^{II}(e^{i\tau}z)$, $f^{II}(z) = \frac{4a}{\pi} \operatorname{arc\,tg} z$

Abbildungen der Kreisfläche $|z|<1$ auf den Parallelstreifen $|\Re(w)|<a$).

III. Es sei

$$-a_2 < \Re\{f(z)\} < a_1, \quad (a_1>0,\ a_2>0), \quad \text{für } |z|<1.$$

Dann ist bei Einführung der Bezeichnung

$$\frac{\pi}{4}\frac{a_2-a_1}{a_1+a_2} = \varepsilon$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{(a_1+a_2)}{\pi} \operatorname{arc\,tg} \frac{-\varrho+\operatorname{tg}\varepsilon}{-\operatorname{tg}\varepsilon\cdot\varrho+1} + \frac{a_1-a_2}{2} &\leqq \Re\{f(z)\} \\ \Re\{f(z)\} &\leqq \frac{2(a_1+a_2)}{\pi} \operatorname{arc\,tg} \frac{\varrho+\operatorname{tg}\varepsilon}{\operatorname{tg}\varepsilon\cdot\varrho+1} + \frac{a_1-a_2}{2} \\ |\Im\{f(z)\}| &\leqq \frac{a_1+a_2}{\pi} \log \operatorname{tg}\left\{\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}\left[\frac{2\varrho}{1-\varrho^2}\cos 2\varepsilon\right]\right\} \end{aligned}\right\} \text{ für } |z|\leqq\varrho<1.$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{2(a_1+a_2)}{\pi} \operatorname{arc\,tg} \frac{-|z|+\operatorname{tg}\varepsilon}{-\operatorname{tg}\varepsilon\cdot|z|+1} + \frac{a_1-a_2}{2} &\leqq \Re\{f(z)\} \\ \Re\{f(z)\} &\leqq \frac{2(a_1+a_2)}{\pi} \operatorname{arc\,tg} \frac{|z|+\operatorname{tg}\varepsilon}{\operatorname{tg}\varepsilon\cdot|z|+1} + \frac{a_1-a_2}{2} \\ |\Im\{f(z)\}| &\leqq \frac{a_1+a_2}{\pi} \log \operatorname{tg}\left\{\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}\left[\frac{2|z|}{1-|z|^2}\cos 2\varepsilon\right]\right\} \end{aligned}\right\} \text{ für } |z|<1.$$

$$|f'(0)| \leqq \frac{2(a_1+a_2)}{\pi}\cos 2\varepsilon.$$

Extremalfunktionen: $f^{III}(e^{i\tau}z)$, $f^{III}(z) = \frac{2(a_1+a_2)}{\pi} \operatorname{arc\,tg} \frac{z+\operatorname{tg}\varepsilon}{\operatorname{tg}\varepsilon\cdot z+1} + \frac{a_1-a_2}{2}$

(Abbildungen der Kreisfläche $|z|<1$ auf den Parallelstreifen

$$-a_2 < \Re(w) < a_1)^{17}).$$

[17]) Die Extremalfunktion $f^{III}(z)$ wird nur an zwei in bezug auf die Achse des Reellen spiegelbildlich symmetrisch gelegenen Punkten ζ_1 und ζ_2 des Einheitskreises unstetig, nämlich logarithmisch unendlich. Die Amplituden dieser Punkte sind

$$\pm\pi\frac{a_2}{a_1+a_2} = \pm\left(\frac{\pi}{2}+2\varepsilon\right),$$

wie sich sofort aus dem Abbildungscharakter der Funktion Arcustangens ergibt. Die Unstetigkeitspunkte teilen beziehungsweise die obere und untere Hälfte des Einheitskreises im Verhältnis $a_2 : a_1$. Das Extremum wird in der Weise realisiert, daß die obere Schranke a_1 von der Extremalfunktion auf dem Bogen $(\zeta_1, 1, \zeta_2)$, die untere Schranke $-a_2$ auf dem Bogen $(\zeta_1, -1, \zeta_2)$ angenommen wird. Analoge Bemerkungen gelten für alle Extremalfunktionen $f(z)$ des § 2 sowie $E(z)$ und $F(z)$ des § 3.

IV. Es bezeichne $D_R[\Re\{f(z)\}]$ die Wertschwankung (algebraisch größter minus algebraisch kleinster Wert) der Funktion $\Re\{f(z)\}$ im Gebiete $|z| \leqq R$ $(R<1)$ oder, was dasselbe ist, auf dem Kreise $|z|=R$. Insbesondere bezeichne $D_1[\Re\{f(z)\}]$ die Wertschwankung im Gebiete $|z|<1$ (oberer Grenzwert minus unterer Grenzwert), d. h., wenn $\Re\{f(z)\}$ auf der ganzen Kreislinie $|z|<1$ noch stetig erklärt ist, die oben definierte Differenzgröße für $R=1$.

Es sei

$$D_1[\Re\{f(z)\}]<\Delta, \quad (\Delta>0).$$

Dann ist

$$\left.\begin{aligned} &|\Re\{f(z)\}| \leqq \frac{2\Delta}{\pi}\operatorname{arc\,tg}\varrho,\\ &|\Im\{f(z)\}| \leqq \frac{\Delta}{\pi}\log\frac{1+\varrho}{1-\varrho},\\ &D_\varrho[\Re\{f(z)\}] \leqq \frac{4\Delta}{\pi}\operatorname{arc\,tg}\varrho, \text{(C. Neumann)}\\ &D_\varrho[\Im\{f(z)\}] \leqq \frac{2\Delta}{\pi}\log\frac{1+\varrho}{1-\varrho}, \end{aligned}\right\} \text{für } |z| \leqq \varrho<1,$$

$$\left.\begin{aligned} &|\Re\{f(z)\}| \leqq \frac{2\Delta}{\pi}\operatorname{arc\,tg}|z|,\\ &|\Im\{f(z)\}| \leqq \frac{\Delta}{\pi}\log\frac{1+|z|}{1-|z|}, \end{aligned}\right\} \text{für } |z|<1.$$

$$|f'(0)| \leqq \frac{2\Delta}{\pi}.$$

Extremalfunktionen: $f^{IV}(e^{iz}z)$; $f^{IV}(z)=\frac{2\Delta}{\pi}\operatorname{arc\,tg} z \equiv (f^{II}(z))_{a=\frac{\Delta}{2}}$, (Abbildungen der Kreisfläche $|z|<1$ auf den Parallelstreifen $|\Re(w)|<\frac{\Delta}{2}$).

Anmerkung: Die unter I—IV angegebenen Schranken sind sämtlich genaueste Schranken in ihrem Geltungsbereich. Die Gleichheitszeichen gelten ausschließlich für die Extremalfunktionen, die von der Wahl von ϱ unabhängig sind; vgl. die Fußnote S. 54.

§ 3.

Absoluter Betrag und Amplitude (Funktionen $E(z)$ und $F(z)$).

Funktionen $F(z)$. Absolutabweichung und Amplitudenabweichung, Absolutschwankung und relative Amplitudenschwankung. Wir gehen in diesem Paragraphen von einer spezielleren Grundannahme über die zu betrachtenden, im folgenden mit $F(z)$ bezeichneten analytischen Funktionen aus. Es werde nämlich nunmehr vorausgesetzt, daß die Funktion $F(z)$ für $|z|<1$ regulär sei und im Nullpunkte verschwinde, außerdem aber an keiner weiteren Stelle des Gebietes $|z|<1$

en Wert 0 annimmt. Indem wir von der Funktion $F(z)$ eventuell zur unktion $\sqrt[\varkappa]{F(z)}$ übergehen, falls $F(z)$ an der Nullstelle von der $\varkappa$-ten rdnung verschwindet, reduzieren wir den Kreis der zu betrachtenden unktionen auf solche Funktionen, die an der Nullstelle von der ersten rdnung verschwinden. Durch Multiplikation mit einer Konstanten können ir weiter erreichen, daß die Ableitung an der Nullstelle den Wert 1 hat. Vir haben also das in der Folge zugrunde liegende reduzierte System on Voraussetzungen

$$F(z) \text{ regulär für } |z| < 1,\ F(0) = 0,\ F'(0) = 1,\ F(z) \neq 0 \text{ für } z \neq 0.$$

Für solche Funktionen $F(z)$ führen wir die folgenden Bezeichnungen in. Wenn

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi), \qquad F(z) = R(\cos\psi + i\sin\psi)$$

esetzt wird, so möge die Größe

$$\left|\frac{F(z)}{z}\right| = \frac{R}{r} = Q(z) = Q$$

ls die Absolutabweichung, die Größe

$$\operatorname{Amp}\frac{F(z)}{z} = \psi - \varphi = \Phi(z) = \Phi$$

ls die Amplitudenabweichung der Funktion $F(z)$ bezeichnet werden, obei wir die Lage z als die Vergleichslage denken, in bezug auf die die bweichung mittels des Quotienten $\frac{F(z)}{z}$ beurteilt wird. Die Größe Q at an der Nullstelle den Wert 1, die Größe Φ den Wert 0, wobei zu emerken ist, daß letztere zunächst nur bis auf ganzzahlige Vielfache on 2π bestimmte Größe durch die Bestimmung $\Phi(0) = 0$ erst fest ormiert erscheint. Die Größen $Q(z)$ und $\Phi(z)$ sind beide im Kreise $|z| < 1$ eindeutig erklärt. Die Größen $\log Q$ und Φ sind Potentialfunktionen; denn es ist

$$f(z) = \log\frac{F(z)}{z} = \log Q + i\Phi.$$

Die Größe Q ist positiv und nimmt in jedem Kreise $|z| \leqq \varrho$ ihr Maximum und ihr Minimum auf dem Kreise $|z| = \varrho$ an, und zwar ist ersteres > 1, d. h. $> Q(0)$, letzteres < 1, d. i. $< Q(0)$, außer wenn $F(z)$ mit z identisch ist, in welchem Falle für alle z $Q(z) = 1$ ist.

Die Größe Φ nimmt in jedem Gebiete $|z| \leqq \varrho$ ihren algebraisch größten und kleinsten Wert auf dem Kreise $|z| = \varrho$ an; ersterer ist wegen $\Phi(0) = 0$ immer positiv, letzterer immer negativ, außer in dem Falle $F(z) = z$, in dem Φ identisch verschwindet.

Wir bezeichnen weiter als Absolutschwankung der Funktion $F(z)$ auf dem Kreise $|z| = \varrho$ den Quotienten

$$\mathfrak{Q}_\varrho = \left(\frac{R_{\max}}{R_{\min}}\right)_{|z|=\varrho} = \left(\frac{Q_{\max}}{Q_{\min}}\right)_{|z|=\varrho} = \left(\frac{Q_{\max}}{Q_{\min}}\right)_{|z|\leqq\varrho} > 1,$$

ferner als relative Amplitudenschwankung auf dem Kreise $|z| = \varrho$ die Differenz

$$\mathfrak{D}_\varrho = (\Phi_{\max} - \Phi_{\min})_{|z|=\varrho} = (\Phi_{\max} - \Phi_{\min})_{|z|\leqq\varrho} > 0.$$

Die Größen $\mathfrak{Q}_\varrho$ und $\mathfrak{D}_\varrho$ sind zugleich mit ϱ wachsende Größen. Wir definieren die Größen $\mathfrak{Q}_1$, $\mathfrak{D}_1$ als die Grenzwerte

$$\mathfrak{Q}_1 = \lim_{\varrho=1} \mathfrak{Q}_\varrho, \qquad \mathfrak{D}_1 = \lim_{\varrho=1} \mathfrak{D}_\varrho.$$

Ist $F(z)$ auch noch auf dem Kreise $|z| = 1$ regulär oder wenigstens stetig und von 0 verschieden, so hat man einfacher

$$\mathfrak{Q}_1 = (\mathfrak{Q}_\varrho)_{\varrho=1}, \qquad \mathfrak{D}_1 = (\mathfrak{D}_\varrho)_{\varrho=1},$$

d. h.

$$\mathfrak{Q}_1 = \left(\frac{R_{\max}}{R_{\min}}\right)_{|z|=1}, \qquad \mathfrak{D}_1 = (\Phi_{\max} - \Phi_{\min})_{|z|=1}.$$

Wir betrachten nun an Stelle der Funktion $F(z)$ die oben definierte Funktion $f(z)$. Diese ist eine Funktion der in § 2 behandelten Klasse, nämlich eine reguläre Funktion innerhalb des Einheitskreises mit dem Werte 0 an der Nullstelle.

Umgekehrt kann man von einer beliebigen Funktion $f(z)$ der $f(z)$-Klasse ausgehen und die Funktion

$$F(z) = z e^{f(z)}$$

bilden, die dann immer der jetzt zu betrachtenden $F(z)$-Klasse angehört. Auf Grund dieser Bemerkung übersieht man sofort, daß den Formelgruppen I, II, III, IV des § 2 (S. 68—70) neue Formelgruppen für die Funktionen $F(z)$ entsprechen. Diese neuen Formelgruppen zerfallen dabei jede in zwei besonders aufzuführende Unterabteilungen a) und b), weil jetzt Q und Φ nicht mehr in so einfacher Weise koordiniert gegenüberstehen wie früher u und v.

Funktionen $E(z)$. Absoluter Betrag und Amplitude. Absolutschwankung und Amplitudenschwankung. Die Funktionen

$$E(z) = \frac{F(z)}{z} = e^{f(z)} = Q(\cos\Phi + i \sin\Phi)$$

bilden eine auch gesondert hervorzuhebende einfachere Klasse. Diese Funktionen sind durch folgende Eigenschaften charakterisiert:

$E(z)$ regulär für $|z| < 1$, $E(0) = 1$, $E(z) \neq 0$ für $z \neq 0$.

ie Größen Q und Φ haben für diese Funktionen nach obiger Definitions-eichung die Bedeutung

$$Q(z) = |E(z)|, \qquad \Phi(z) = \operatorname{Amp} E(z).$$

e folgende Zusammenstellung gilt nun gleichzeitig für die Funktionen (z) und $E(z)$.

$\mathfrak{D}_\varrho$ und $\mathfrak{D}_\varrho$ haben für $E(z)$ die Bedeutung als *Absolutschwankung* w. *Amplitudenschwankung* (letztere hier im Gegensatz zu dem analogen griff für Funktion $F(z)$ ohne den Zusatz „relativ").

Tabellarische Zusammenstellung zu § 3.

Allgemeine Voraussetzungen:

$E(z)$ regulär für $|z| < 1$, $E(0) = 1$, $E(z) \neq 0$ für $z \neq 0$,

(z) regulär für $|z| < 1$, $F(0) = 0$, $F'(0) = 1$, $F(z) \neq 0$ für $z \neq 0$.

nn gelten unter den im folgenden angegebenen hinzutretenden Spezial-raussetzungen die Beziehungen. (Vgl. weiter unten die „*Modifikation r Voraussetzungen*".)

Ia. Es sei

$$Q(z) < \alpha \quad (\alpha > 1) \quad \text{für } |z| < 1.$$

Dann ist

$$\left.\begin{aligned} \alpha^{\frac{2\varrho}{1-\varrho}} \leqq Q(z) \leqq \alpha^{\frac{2\varrho}{1+\varrho}} \\ |\Phi(z)| \leqq \frac{2\log\alpha \cdot \varrho}{1-\varrho^2} \end{aligned}\right\} \text{für } |z| \leqq \varrho < 1,$$

$$\left.\begin{aligned} \alpha^{\frac{2|z|}{1-|z|}} \leqq Q(z) \leqq \alpha^{\frac{2|z|}{1+|z|}} \\ |\Phi(z)| \leqq \frac{2\log\alpha \cdot |z|}{1-|z|^2} \end{aligned}\right\} \text{für } |z| < 1.$$

$$|E'(0)| \leqq 2\log\alpha, \qquad |F''(0)| \leqq 4\log\alpha.$$

Extremalfunktionen: $F(z) = z e^{f^{I(e^{i\tau}z)}}$, $(a = \log\alpha)$; $E(z) = e^{f^{I(e^{i\tau}z)}}$.

I'a. Es sei

$$Q(z) > \frac{1}{\alpha} \quad (\alpha > 1) \quad \text{für } |z| < 1.$$

Dann ist

$$\left.\begin{aligned} \alpha^{\frac{2\varrho}{1+\varrho}} \leqq Q(z) \leqq \alpha^{\frac{2\varrho}{1-\varrho}} \\ |\Phi(z)| \leqq 2\log\alpha \frac{\varrho}{1-\varrho^2} \end{aligned}\right\} \text{für } |z| \leqq \varrho < 1,$$

$$\left.\begin{aligned} \alpha^{\frac{2|z|}{1+|z|}} \leqq Q(z) \leqq \alpha^{\frac{2|z|}{1-|z|}} \\ |\Phi(z)| \leqq 2\log\alpha \frac{|z|}{1-|z|^2} \end{aligned}\right\} \text{für } |z| < 1.$$

$$|E'(0)| \leqq 2\log\alpha, \qquad |F''(0)| \leqq 4\log\alpha.$$

Extremalfunktionen: $F(z)=ze^{-f^{I}(e^{i\tau}z)}$, $(a=\log\alpha)$; $E(z)=e^{-f^{I}(e^{i\tau}z}$

Ib. Es sei

$$\Phi(z)<a \quad (a>0) \quad \text{für } |z|<1.$$

Dann ist

$$\left.\begin{aligned} e^{-\frac{2a\varrho}{1-\varrho^2}} \leqq Q(z) \leqq e^{\frac{2a\varrho}{1-\varrho^2}} \\ -\frac{2a\varrho}{1-\varrho} \leqq \Phi(z) \leqq \frac{2a\varrho}{1+\varrho} \end{aligned}\right\} \text{für } |z|\leqq\varrho<1,$$

$$\left.\begin{aligned} e^{-\frac{2a|z|}{1-|z|^2}} \leqq Q(z) \leqq e^{\frac{2a|z|}{1-|z|^2}} \\ -\frac{2a|z|}{1-|z|} \leqq \Phi(z) \leqq \frac{2a|z|}{1+|z|} \end{aligned}\right\} \text{für } |z|<1.$$

$$|E'(0)|\leqq 2a, \qquad |F''(0)|\leqq 4a.$$

Extremalfunktionen: $\tilde{F}(z)=ze^{if^{I}(e^{i\tau}z)}$; $\tilde{E}(z)=e^{if^{I}(e^{i\tau}z)}$.

IIa. Es sei

$$\frac{1}{\alpha}<Q(z)<\alpha \quad (\alpha>1) \quad \text{für } |z|<1.$$

Dann ist

$$\left.\begin{aligned} \alpha^{-\frac{4}{\pi}\operatorname{arc tg}\varrho} \leqq Q(z) \leqq \alpha^{\frac{4}{\pi}\operatorname{arc tg}\varrho} \\ |\Phi(z)| \leqq \frac{2}{\pi}\log\alpha\log\frac{1+\varrho}{1-\varrho} \end{aligned}\right\} \text{für } |z|\leqq\varrho<1,$$

$$\left.\begin{aligned} \alpha^{-\frac{4}{\pi}\operatorname{arc tg}|z|} \leqq Q(z) \leqq \alpha^{\frac{4}{\pi}\operatorname{arc tg}|z|} \\ \Phi(z) \leqq \frac{2}{\pi}\log\alpha\cdot\log\frac{1+|z|}{1-|z|} \end{aligned}\right\} \text{für } |z|<1.$$

$$|E'(0)|\leqq\frac{4\log\alpha}{\pi}, \qquad |F''(0)|\leqq\frac{8\log\alpha}{\pi}.$$

Extremalfunktionen: $F(z)=ze^{f^{II}(e^{i\tau}z)}$ $(a=\log\alpha)$; $E(z)=e^{f^{II}(e^{i\tau}}$

IIb. Es sei

$$|\Phi(z)|<a \quad (a>0) \quad \text{für } |z|<1.$$

Dann ist

$$\left.\begin{aligned} \left(\frac{1+\varrho}{1-\varrho}\right)^{-\frac{2a}{\pi}} \leqq Q(z) \leqq \left(\frac{1+\varrho}{1-\varrho}\right)^{\frac{2a}{\pi}} \\ |\Phi(z)| \leqq \frac{4a}{\pi}\operatorname{arc tg}\varrho \end{aligned}\right\} \text{für } |z|\leqq\varrho<1,$$

$$\left.\begin{aligned} \left(\frac{1+|z|}{1-|z|}\right)^{-\frac{2a}{\pi}} \leqq Q(z) \leqq \left(\frac{1+|z|}{1-|z|}\right)^{\frac{2a}{\pi}} \\ |\Phi(z)| \leqq \frac{4a}{\pi}\operatorname{arc tg}|z| \end{aligned}\right\} \text{für } |z|<1.$$

$$|E'(0)|\leqq\frac{4a}{\pi}, \qquad |F''(0)|\leqq\frac{8a}{\pi}.$$

Extremalfunktionen:

$$\tilde{F}(z) = z e^{i f^{II}(e^{i\tau} z)} = z\left(\frac{1+e^{i\sigma}z}{1-e^{i\sigma}z}\right)^{\frac{2\pi}{\pi}} \quad \left(\sigma = \tau + \frac{\pi}{2}\right); \qquad \tilde{E}(z) = e^{i f^{II}(e^{i\tau} z)}.$$

III a. Es sei

$$\frac{1}{\alpha_2} < Q(z) < \alpha_1 \quad (\alpha_1 > 1,\ \alpha_2 > 1) \quad \text{für } |z| < 1;$$

werde bezeichnet

$$\log \alpha_1 = a_1, \qquad \log \alpha_2 = a_2, \qquad (a_1 > 0, \quad a_2 > 0).$$

Dann ist

$$\left.\begin{aligned} e^{-\lambda_2^{III}} \leqq Q(z) &\leqq e^{\lambda_1^{III}} \\ \Phi(z) &\leqq \mu^{III} \end{aligned}\right\} \text{ für } |z| \leqq \varrho < 1,$$

dabei gesetzt ist

$$\lambda_1^{III} = 2\frac{a_1+a_2}{\pi} \operatorname{arc\,tg} \frac{\varrho + \operatorname{tg}\varepsilon}{\operatorname{tg}\varepsilon \cdot \varrho + 1} + \frac{a_1 - a_2}{2}, \qquad \varepsilon = \frac{\pi}{4}\frac{a_2 - a_1}{a_1 + a_2}$$

$$-\lambda_2^{III} = 2\frac{a_1+a_2}{\pi} \operatorname{arc\,tg} \frac{-\varrho + \operatorname{tg}\varepsilon}{-\operatorname{tg}\varepsilon \cdot \varrho + 1} + \frac{a_1 - a_2}{2}$$

$$\mu^{III} = \frac{a_1+a_2}{\pi} \log \operatorname{tg}\left\{\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}\left[\frac{2\varrho}{1-\varrho^2}\cos 2\varepsilon\right]\right\}$$

$$|E'(0)| \leqq \frac{2\log(\alpha_1\alpha_2)}{\pi} \cdot \cos\left\{\frac{\pi}{2}\frac{\log(\alpha_2 : \alpha_1)}{\log(\alpha_1 \cdot \alpha_2)}\right\}$$

$$|F''(0)| \leqq \frac{4\log(\alpha_1\alpha_2)}{\pi} \cdot \cos\left\{\frac{\pi}{2}\frac{\log(\alpha_2 : \alpha_1)}{\log(\alpha_1 \cdot \alpha_2)}\right\}.$$

Extremalfunktionen: $F(z) = z e^{f^{III}(e^{i\tau} z)}$; $\qquad E(z) = e^{f^{III}(e^{i\tau} z)}$.

III b. Es sei

$$-\alpha_2 < \Phi(z) < \alpha_1 \quad \text{für} \quad |z| < 1.$$

Dann ist

$$\left.\begin{aligned} e^{-\mu^{III}} \leqq Q(z) &\leqq e^{\mu^{III}} \\ -\lambda_2^{III} \leqq \Phi(z) &\leqq \lambda_1^{III} \end{aligned}\right\} \text{ für } |z| \leqq \varrho < 1.$$

$$|E'(0)| \leqq \frac{2}{\pi}(a_1 + a_2) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}\frac{a_2 - a_1}{a_1 + a_2}\right)$$

$$|F''(0)| \leqq \frac{4}{\pi}(a_1 + a_2) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}\frac{a_2 - a_1}{a_1 + a_2}\right).$$

Extremalfunktionen: $\tilde{F}(z) = z e^{i f^{III}(e^{i\tau} z)}$; $\qquad \tilde{E}(z) = e^{i f^{III}(e^{i\tau} z)}$.

IV a. Es sei

$$\mathfrak{Q}_1 < \alpha \quad (\alpha > 1).$$

Dann ist

$$\left.\begin{aligned} \alpha^{-\frac{2}{\pi}\operatorname{arc\,tg}\varrho} \leqq Q(z) &\leqq \alpha^{\frac{2}{\pi}\operatorname{arc\,tg}\varrho} \\ |\Phi(z)| &\leqq \frac{1}{\pi}\log\alpha \log\frac{1+\varrho}{1-\varrho} \end{aligned}\right\} \text{ für } |z| \leqq \varrho < 1,$$

$$\mathfrak{D}_\varrho \leqq \alpha^{\frac{4}{\pi}\operatorname{arc\,tg}\varrho}\ ^{18}), \qquad \mathfrak{D}_\varrho \leqq \frac{2}{\pi}\log\alpha\log\frac{1+\varrho}{1-\varrho},$$

$$\left.\begin{aligned} \alpha^{-\frac{2}{\pi}\operatorname{arc\,tg}|z|} \leqq Q(z) &\leqq \alpha^{\frac{2}{\pi}\operatorname{arc\,tg}|z|} \\ |\Phi(z)| &\leqq \frac{1}{\pi}\log\alpha\log\frac{1+|z|}{1-|z|} \end{aligned}\right\} \text{ für } |z|<1.$$

$$|E'(0)| \leqq \frac{4\log\alpha}{\pi}, \qquad |F''(0)| \leqq \frac{8\log\alpha}{\pi}.$$

Extremalfunktionen: $F(z) = ze^{fI^V(e^{i\tau}z)}$, $(\Delta = \log\alpha)$; $E(z) = e^{fI^V(e^{i\tau}z)}$

IVb. Es sei

$$\mathfrak{D}_1 < a \quad (a>0).$$

Dann ist

$$\left.\begin{aligned} \left(\frac{1+\varrho}{1-\varrho}\right)^{-\frac{a}{\pi}} \leqq Q(z) &\leqq \left(\frac{1+\varrho}{1-\varrho}\right)^{\frac{a}{\pi}} \\ |\Phi(z)| &\leqq \frac{2a}{\pi}\operatorname{arc\,tg}\varrho \end{aligned}\right\} \text{ für } |z| \leqq \varrho < 1,$$

$$\mathfrak{D}_\varrho \leqq \left(\frac{1+\varrho}{1-\varrho}\right)^{\frac{2a}{\pi}}, \qquad \mathfrak{D}_\varrho \leqq \frac{4a}{\pi}\operatorname{arc\,tg}\varrho,$$

$$\left.\begin{aligned} \left(\frac{1+|z|}{1-|z|}\right)^{-\frac{a}{\pi}} \leqq Q(z) &\leqq \left(\frac{1+|z|}{1-|z|}\right)^{\frac{a}{\pi}} \\ |\Phi(z)| &\leqq \frac{2a}{\pi}\operatorname{arc\,tg}|z| \end{aligned}\right\} \text{ für } |z|<1.$$

$$|E'(0)| \leqq \frac{4a}{\pi}, \qquad |F''(0)| \leqq \frac{8a}{\pi}.$$

Extremalfunktionen:

$$\tilde{F}(z) = ze^{if^{IV}(e^{i\tau}z)} = z\left(\frac{1+e^{i\sigma}z}{1-e^{i\sigma}z}\right)^{\frac{\Delta}{\pi}} \left(\Delta = a,\ \sigma = \tau + \frac{\pi}{2}\right), \quad \tilde{E}(z) = e^{if^{IV}(e^{i\tau}z)}$$

Modifikation der Voraussetzungen.

Werden die allgemeinen Voraussetzungen durch die Annahme der Regularität oder wenigstens Stetigkeit der Funktion $F(z)$ bzw. $E(z)$ auf der Peripherie des Einheitskreises verschärft („*modifizierte allgemeine Voraussetzungen*"), wobei dann auch der Wert 0 auf dem Einheitskreis nicht angenommen werden soll, so kann das System der Spezialvoraussetzungen Ia, I'a usw. ohne weiteres durch das folgende „modifizierte System der Spezialvoraussetzungen" ersetzt werden:

---

[18]) Die Veranlassung zur expliziten Aufstellung dieser Formel gab mir eine auf schlichte Abbildungen sich beziehende sinnentsprechende Frage des Herrn H. Liebmann, dem ich obige Formel seiner Zeit mitgeteilt habe.

Ia: $\left\{\begin{matrix}|F(z)|\\ \text{bzw. } |E(z)|\end{matrix}\right\} \leqq \alpha, \quad (\alpha > 1), \quad \text{für } |z| = 1,$

I'a: $\left\{\begin{matrix}|F(z)|\\ \text{bzw. } |E(z)|\end{matrix}\right\} \geqq \frac{1}{\alpha}, \quad (\alpha > 1), \quad \text{für } |z| = 1,$

Ib: $\Phi(z) \leqq a, \quad (a > 0), \quad \text{für } |z| = 1,$

IIa: $\frac{1}{\alpha} \leqq \left\{\begin{matrix}|F(z)|\\ \text{bzw. } |E(z)|\end{matrix}\right\} \leqq \alpha, \quad (\alpha > 1), \quad \text{für } |z| = 1,$

IIb: $|\Phi(z)| \leqq a, \quad (a > 0), \quad \text{für } |z| = 1,$

IIIa: $\frac{1}{\alpha_2} \leqq \left\{\begin{matrix}|F(z)|\\ \text{bzw. } |E(z)|\end{matrix}\right\} \leqq \alpha_1, \quad (\alpha_1 > 1, \ \alpha_2 > 1) \quad \text{für } |z| = 1,$

IIIb: $-a_2 \leqq \Phi(z) \leqq a_1, \quad (a_1 > 0, \ a_2 > 0), \quad \text{für } |z| = 1,$

IVa: $\mathfrak{D}_1 \leqq \mathfrak{A}, \quad (\mathfrak{A} > 1), \quad \text{für } |z| = 1,$

IVb: $\mathfrak{D}_1 \leqq a, \quad (a > 0), \quad \text{für } |z| = 1.$

lsdann können in den behaupteten Beziehungen Ia, I'a usw. die Gleich-
itszeichen niemals in Frage kommen, weil die Extremalfunktionen nicht
ehr auf dem ganzen Einheitskreise stetig sind.

Abbildung durch die Extremalfunktionen.

Was zunächst die Abbildung durch die Extremalfunktionen $E(z)$
nd $\tilde{E}(z)$ anbetrifft, so ist deren Charakter sofort ersichtlich. Es ergeben
ch bei den Funktionen $E(z)$ Abbildungen auf Teilgebiete der logarith-
ischen Windungsfläche unendlich hoher Ordnung, die von einem oder zwei
ıendlich oft vorwärts und rückwärts durchlaufen zu denkenden Kreisen
egrenzt werden (*einfach ausgeartete bzw. gewöhnliche ringförmige Gewinde*),
ei den Funktionen $\tilde{E}(z)$ Abbildungen auf einseitig begrenzte und daher
ıendlich-vielblättrige bzw. zweiseitig begrenzte und also endlich-vielblät-
ige unendliche Sektoren der logarithmischen Windungsfläche (*einfach*
ısgeartete bzw. gewöhnliche Sektoren).

Die Extremalfunktionen $F(z)$ bzw. $\tilde{F}(z)$ hatten die Form

$$ze^{f^{(\lambda)}(e^{i\tau}z)}, \quad ze^{if^{(\lambda)}(e^{i\tau}z)} \qquad [\lambda = I, II, III, IV],$$

denen noch (vgl. I'a) die Funktion $ze^{-f^I(e^{i\tau}z)}$ hinzutritt.

Setzen wir speziell

$$F^\lambda(z) = ze^{f^{(\lambda)}(z)}, \quad F^{I'}(z) = ze^{-f^I(-z)}, \quad \tilde{F}^\lambda(z) = ze^{if^{(\lambda)}(-iz)},$$

ıd bemerken, daß die obigen allgemeinen Extremalfunktionen aus den
eziellen vermöge gleicher simultaner Drehungen der Argument- und
ınktionsebene hervorgehen, so haben wir nur noch nötig, die Abbildungen

durch die speziellen Extremalfunktionen zu ermitteln. Von den Funktionen $\tilde{F}^{II}(z)$ und $\tilde{F}^{IV}(z)$ geben wir noch deren reelle Form an

$$\tilde{F}^{II}(z) = z\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^{\frac{2a}{\pi}}, \quad \tilde{F}^{IV}(z) = z\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^{\frac{A}{\pi}}.$$

Abbildung durch die Funktion $F^I(z)$.

$$W = F^I(z) = ze^{f^I(z)} = ze^{\frac{2az}{1+z}} = ze^w.$$

Die Ableitung dieser Funktion hat zwei Nullstellen, die sich als Wurzeln der Gleichung

$$z^2 + 2(a+1)z + 1 = 0$$

ergeben. Die beiden Wurzeln z_1 und z_2 sind reziprok zu einander. Nur eine derselben, z_1, liegt im Kreise $|z| \leqq 1$, nämlich innerhalb des reellen Intervalls $(-1, \ldots, 0)$.

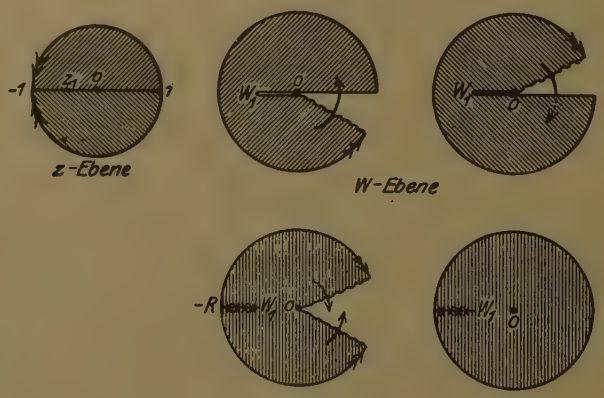


Fig. *I*.

Diesem Werte z_1 entspreche der Wert $W = W_1$. Bei der Abbildung der Fläche $|z| \leqq 1$ treten im Bilde Windungspunkte unendlich hoher Ordnung an der Nullstelle auf. Unsere Figuren *I* veranschaulichen zunächst die Abbildung der oberen und unteren Hälfte der Fläche des z-Einheitskreises, danach die zustandekommende Bildfläche des ganzen z-Einheitskreises. Letztere Bildfläche entsteht durch Anheftung eines Windungsflächenstückes unendlich hoher Ordnung an ein schlichtes Grundblatt. Die Figuren zeigen die zusammengeheftet zu denkenden Flächenstücke getrennt. Die Linien, längs denen die Heftung zu erfolgen hat, sind durch Kreuzpunktierung hervorgehoben. In den Figuren ist der Radius des Umgrenzungskreises gleich $e^a = \alpha$.

Die Figuren *I* entstehen aus den Figuren *II'*, indem man sich den Radius des inneren Begrenzungskreises unendlich klein werdend denkt.

entsteht nämlich $F^I(z)$ als Grenzfunktion aus $F^{III}(z)$, indem man a_2 v. α_2 unendlich groß werden läßt.

Abbildung durch die Funktion $F^{I'}(z) = ze^{-f^I(-z)}$.

$$F^{I'}(z) = ze^{\frac{2az}{1-z}}.$$

Für die Nullstellen der Ableitung ergibt sich die Gleichung

$$z^2 + 2(a-1)z + 1 = 0.$$

e Abbildungsfunktion entsteht als Grenzfunktion aus der Funktion $F^{III}(z)$, em man a_1 bzw. α_1 unendlich groß werdend denkt. Die entsprechenden uren werden demnach aus den Figuren II', II'', II''' gewonnen, indem n den Radius des äußeren Begrenzungskreises über alle Grenzen wachsen t. Die drei Fälle sind hier durch die Bedingungen

$$a \gtrless 2$$

rakterisiert.

Abbildung durch die Funktion $F^{II}(z)$.

$$W = F^{II}(z) = ze^{f^{II}(z)} = ze^{\frac{4a}{\pi} \operatorname{arc\,tg} z} = ze^{w}.$$

Die Nullstellen der Ableitung ergeben sich als zueinander reziproke rzeln z_1 und z_2 der Gleichung

$$z^2 + \frac{4a}{\pi} z + 1 = 0.$$

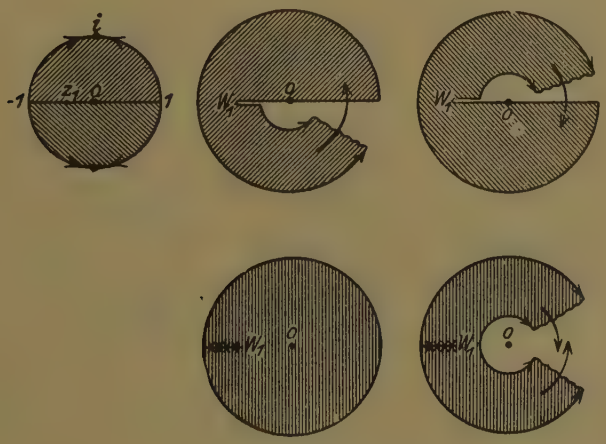


Fig. II'.

Es sind nun die drei Fälle zu unterscheiden:

$$2a > \pi \quad (\text{Figg. } II')$$

$$2a = \pi \quad (\text{Figg. } II'')$$
$$2a < \pi \quad (\text{Figg. } II''').$$

Die Punkte W_1 und W_2 der W-Ebene entsprechen den Punkten z_1 und z_2 der z-Ebene. Die nur teilweise in den Figuren zur Darstellung gebrachten Flächenstücke sind, wie durch gefiederte Pfeile angedeutet ist, durch un-

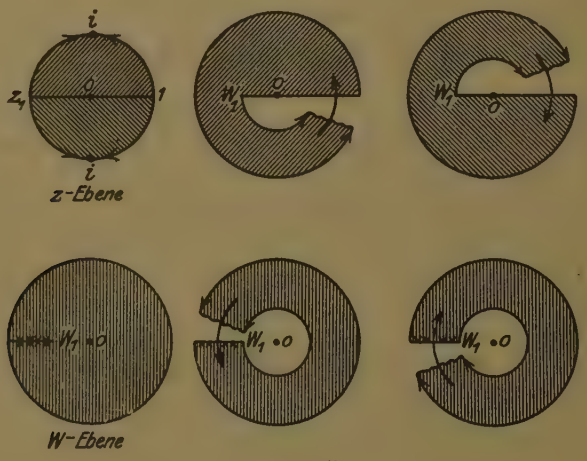


Fig. II''.

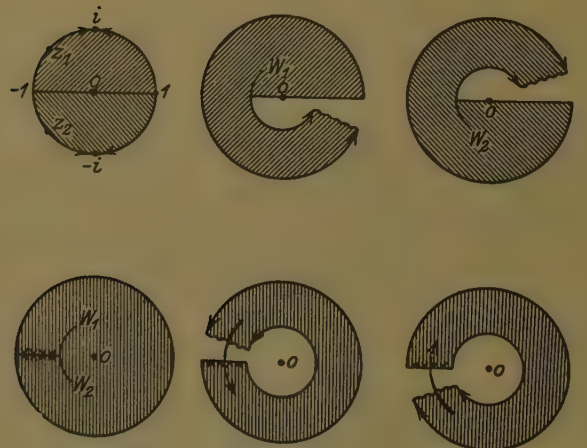


Fig. II'''.

endlich-vielblättrige Flächengewinde vervollständigt zu denken. In den Fällen II'' und II''' sind jedesmal zwei Flächenstücke in ersichtlicher Weise an das Grundblatt angeheftet zu denken. In allen Figuren II ist der Radius des Umgrenzungskreises gleich $e^a = \alpha$, der des inneren Begrenzungskreises gleich $e^{-a} = \frac{1}{\alpha}$ zu denken.

Abbildung durch die Funktion $F^{III}(z)$.

$$W = F^{III}(z) = ze^{f^{III}(z)} = ze^{\frac{2(a_1+a_2)}{\pi}\operatorname{arc\,tg}\frac{z+W_0}{W_0 z+1}+\frac{a_1-a_2}{2}} = ze^{w}.$$

Unstetigkeitsstellen der Abbildungsfunktion sind die Punkte ζ_1 und ζ_2 f der Peripherie des Einkreises, deren Amplituden die Werte $\pm\left(\frac{\pi}{2}+2\varepsilon\right)$ ben, deren reeller Teil folglich gleich $-\sin 2\varepsilon$ ist, vgl. S. 69. Die ıllstellen der Ableitung der Funktion $F^{III}(z)$ sind die Wurzeln z_1 und der Gleichung

$$z^2 + 2\left(\sin 2\varepsilon + \frac{a_1+a_2}{\pi}\cos 2\varepsilon\right)z + 1 = 0.$$

e Klammergröße ist immer größer als -1, weil 2ε auf die Werte ischen $-\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{\pi}{2}$ beschränkt ist; $2\varepsilon = \frac{\pi}{2}\frac{a_2-a_1}{a_1+a_2}$. Ist $\varepsilon = 0$, d. h. $= a_2 = a$, so befinden wir uns im Falle der Funktion $F^{II}(z)$. Es ıd nun drei Fälle zu unterscheiden

$$\sin 2\varepsilon + \frac{a_1+a_2}{\pi}\cos 2\varepsilon \gtreqless 1,$$

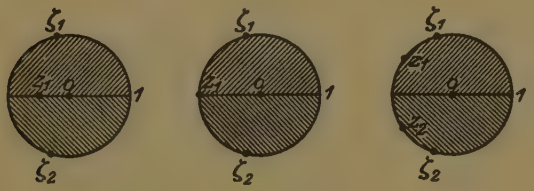


Fig. *III*.

nen die in den Figuren *III* angedeuteten Wurzellagen entsprechen. Diesen ei Fällen entsprechend treten wieder die Figuren *II'*, *II''*, *II'''* in Kraft, r mit dem Unterschiede, daß der Radius des Umgrenzungskreises jetzt eich $e^{a_1} = \alpha_1$, der des Innenkreises gleich $e^{-a_2} = \frac{1}{\alpha_2}$ zu denken ist.

Abbildung durch die Funktion $F^{IV}(z)$.

Es ist

$$F^{IV}(z) = ze^{f^{IV}(z)} = F^{II}(z)_{\left(a=\frac{\Delta}{2}\right)}.$$

Somit treten wieder die Figuren *II'*, *II''*, *II'''* in Geltung, entechend den drei Fällen $\Delta \gtreqless \pi$.

Abbildung durch die Funktionen $\tilde{F}^I(z)$, $\tilde{F}^{II}(z)$, $\tilde{F}^{III}(z)$, $\tilde{F}^{IV}(z)$.

$$\tilde{W} = \tilde{F}^{\lambda}(z) = ze^{if^{\lambda}\left(\frac{z}{i}\right)} = ze^{\tilde{w}} \qquad [\lambda = I, II, III, IV].$$

Zur Ermittlung der durch diese Funktionen von der Fläche des z-Einstskreises geleisteten konformen Abbildungen hat man einerseits den Verlauf

der Begrenzungskurve der Bildfläche in der $\tilde{W}$-Ebene festzustellen, was an der Hand des durch die obigen darstellenden Formeln kenntlich gemachten Aufbaues dieser Funktionen leicht gelingt. Ferner wird man vor allem diejenigen Stellen des z-Einheitskreises bestimmen, an welchen die Ableitung verschwindet. Wir haben

$$\tilde{F}^{I}(z) = ze^{\frac{2az}{1-iz}}$$

$$\tilde{F}^{II}(z) = ze^{\frac{4ai}{\pi}\operatorname{arc\,tg}(-iz)} = z\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^{\frac{2a}{\pi}}$$

$$\tilde{F}^{III}(z) = ze^{\frac{2i(a_1+a_2)}{\pi}\operatorname{arc\,tg}\frac{W_0-iz}{1-W_0iz}+i\frac{a_1-a_2}{2}}$$

$$\tilde{F}^{IV}(z) = ze^{\frac{2iA}{\pi}\operatorname{arc\,tg}(-iz)} = z\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^{\frac{A}{\pi}} = F^{II}(z)_{\left(a=\frac{A}{2}\right)}.$$

Für die Nullstellen der Ableitung ergeben sich hieraus die quadratischen Gleichungen

$$z^2 + 2(i-a)z - 1 = 0$$

$$z^2 - \frac{4a}{\pi}z - 1 = 0$$

$$z^2 + 2z\left(i\sin 2\varepsilon - \frac{a_1+a_2}{\pi}\cos 2\varepsilon\right) - 1 = 0$$

$$z^2 - \frac{2A}{\pi}z - 1 = 0,$$

denen zufolge stets eine und nur eine der beiden Nullstellen, z_1, innerhalb des Einheitskreises liegt. Diese Stelle z_1 befindet sich für $\lambda = I$ innerhalb des dritten Quadranten, für $\lambda = 2$ innerhalb des reellen Intervalls $(0 \ldots -1)$, für $\lambda = III$ innerhalb des dritten oder zweiten Quadranten, je nachdem $a_2 \gtrless a_1$ ist, für $\lambda = IV$ wie für $\lambda = II$ innerhalb des reellen Intervalls $(0 \ldots -1)$. Der Fall $\lambda = III$ geht für $a_1 = a_2 = a$ in den Fall $\lambda = II$ über, für $a_2 = \infty$ in den Fall $\lambda = I$. Die Einsicht in die den einzelnen Fällen entsprechend zustande kommenden Abbildungen wird am einfachsten in der Reihenfolge $\lambda = II$ bzw. IV, III, I gewonnen. Dazu werde noch die Bemerkung gemacht, daß die Abbildung der Funktion $if^{\lambda}\left(\frac{i}{z}\right)$ aus derjenigen der Funktion $f^{\lambda}(z)$ durch Vermittelung einer simultanen Drehung der Argument- und Funktionsebene um den Winkel $+\frac{\pi}{2}$ entsteht.

Zur Erläuterung der beigefügten Figuren $\tilde{I}$, $I\tilde{I}$ $(I\tilde{V})$, $II\tilde{I}$ seien noch einige Bemerkungen gemacht.

Fig. $\tilde{I}$, 3 denkt man sich zweckmäßig so entstanden: Auf der unendlich vielblättrigen Windungsfläche mit dem Nullpunkt und unendlich ferne

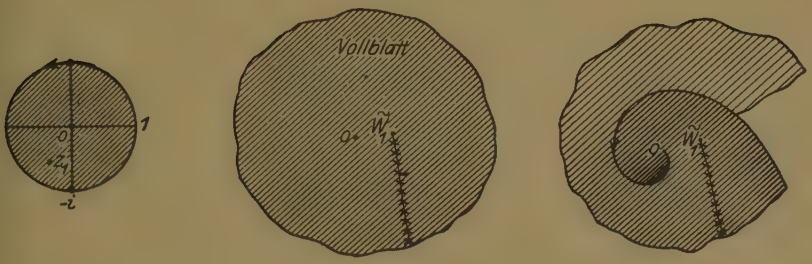


Fig. $\tilde{I}$.

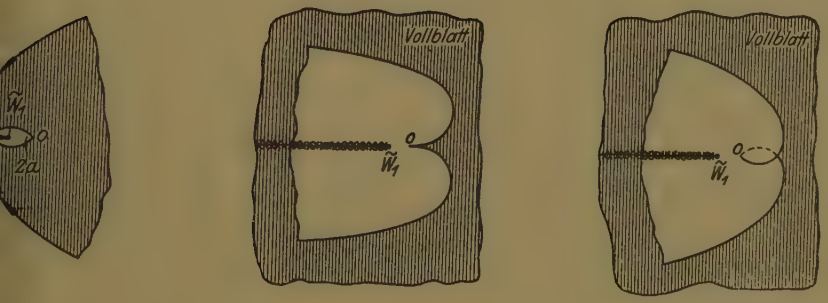


Fig. $\tilde{II}$.

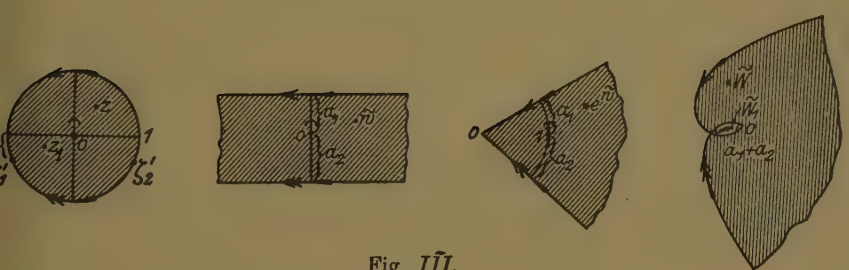


Fig. $\tilde{III}$.

nkte als Windungspunkten unendlich hoher Ordnung wird eine in Figur edeutete Linie vom Nullpunkte nach dem unendlich fernen Punkte ogen, aus der Richtung $a - \frac{\pi}{2}$ aus dem Unendlichen kommend und

nach einer einfachen Umlaufung des Nullpunktes in diesem in derselben genannten Richtung endigend, so daß sie die Totalkrümmung 2π hat. Die Windungsfläche ist dadurch in zwei einfach zusammenhängende Stücke zerlegt, deren eines, hier allein in Betracht kommendes durch Fig. $\tilde{I}$, 3 dargestellt wird. Das Flächenstück $\tilde{I}$, 3 hat man sich nun längs der kreuzpunktierten, ebenfalls ins Unendliche reichende Linie aufgeschnitten zu denken und so mit dem entsprechend aufgeschnittenen Vollblatt $\bar{I}$, 1 über Kreuz verheftet zu denken, wobei im Punkte W_1 ein Windungspunkt erster Ordnung entsteht. Die so entstandene Gesamtfläche ist das ein eindeutige Bild der Kreisfläche $\bar{I}$, 1; insbesondere ist $\tilde{W}_1$ der Bildpunkt des Punktes z_1.

Das Flächenstück $\tilde{II}$, 4 ist im inneren Zweieck zweiblättrig zu denken, wobei W_1 Windungspunkt ist und die kreuzpunktierte Linie als Durchdringslinie zu denken ist. Das Flächenstück besitzt bei 0 und ∞ je eine Ecke der Winkelöffnung 2α. Wird $\alpha = \pi$, $\alpha > \pi$, so kommen Flächenstücke wie $\tilde{II}$, 5 bzw. $\tilde{II}$, 6 mit eingehefteten Vollblättern zustande. Die Zahl der letzteren wird bei jeder weiteren Vergrößerung von α um die Größe π ihrerseits um eine Einheit zunehmen, wobei in W_1 ein einfacher Windungspunkt bleibt, außerdem aber die Ecken der Öffnung 2α bei 0 und ∞ vielblättrig werden.

Die Figuren $I\tilde{I}I$, 2, 3 geben einen Einblick in die zustande kommende Abbildung der Kreisfläche $I\tilde{I}I$, 1 auf die Fläche $I\tilde{I}I$, 4, die sich als eine unsymmetrische Verzerrung der Fläche $\tilde{II}$, 4 darstellt. Diese Fläche hat bei 0 und ∞ je eine Ecke der Winkelöffnung $(\alpha_1 + \alpha_2)$. Wird $\alpha_1 + \alpha_2 = 2\pi$, $> 2\pi$, so ergeben sich unsymmetrische Verzerrungen der Flächen $\tilde{II}$, 5 bzw. $\tilde{II}$, 6.

(Eingegangen am 7. Mai 1919.)

Über affine Geometrie XXVI [1]): Wackelige Achtflache.

Von

Wilhelm Blaschke in Hamburg.

Die 24 Enden von 12 geradlinigen Stäben seien zu je vieren in Knoten" gelenkig verbunden. So entsteht ein „Stabwerk" aus 8 Dreien, wir wollen kurz sagen ein „Achtflach". Einer Anregung von Stephanos folgend, hat R. Bricard [2]) die Frage behandelt, wann ein hes Achtflach beweglich ist, das heißt bei Aufrechterhaltung der Längen er geradlinigen Stäbe deformiert werden kann. Dagegen scheint noch t die Frage gelöst zu sein:

Wann ist ein Achtflach wackelig? Darunter soll verstanden werden, bei einer geeigneten Verrückung der Knoten die Ableitungen der blängen nach der Zeit anfangs verschwinden. Die Frage ist gleichtig mit der folgenden: *Wann können in einem Achtflach Selbstspangen auftreten*? Wann können also in den Stäben des Stabwerks Spangen herrschen, ohne daß eingeprägte Kräfte vorhanden sind? Bei der enden ganz elementaren Lösung wird sich ein einfacher Zusammenhang ausstellen zwischen einem wackeligen Achtflach und der von Möbius deckten Figur aus zwei Vierflachen, die einander gleichzeitig ein- und schrieben sind.

§ 1.

Drehriß eines Stabwerks.

Denken wir uns ein Stabwerk, das aus lauter Dreiecken $\mathfrak{X}_i$ aufgebaut einer unendlich kleinen Bewegung unterworfen! Die mit dem Drei-

[1]) Die vorhergehenden Aufsätze unter diesem Obertitel sind in den Leipziger chten Bd. 68 bis 71 erschienen, die vorliegende Arbeit ist aber ohne Zusammen g mit den vorausgegangenen.

[2]) Mémoire sur la théorie de l'octaèdre articulé, Liouvilles Journal (5) 3 (1897), 13—148.

eck $\mathfrak{X}_i$ starr verbundenen Punkte $\mathfrak{p}$ erfahren eine Verrückung, die sich so darstellen läßt[3]):

$$\delta\mathfrak{p} = \{\mathfrak{s}_i + [\mathfrak{x}_i\mathfrak{p}]\}\,\delta t. \tag{1}$$

Dabei bedeutet $\mathfrak{p}$ den Vektor vom Ursprung nach unserem Punkte $\mathfrak{p}$ hin, $\mathfrak{s}_i$ und $\mathfrak{x}_i$ den Schieb- und Drehvektor des mit $\mathfrak{X}_i$ verbundenen starren Körpers, δt das Zeitelement, und die eckige Klammer deutet wie üblich das Vektorprodukt an. Alle die zu den Dreiecken $\mathfrak{X}_i$ gehörigen Drehvektoren $\mathfrak{x}_i$ denken wir uns vom Ursprung abgetragen. Die Endpunkte $(\mathfrak{x}_i)$ bilden dann ein Punktsystem, das der „*Drehriß*" zu der unendlich kleinen Verrückung unseres Stabwerks $(\mathfrak{X}_i)$ heißen soll.

Es seien $\mathfrak{X}_i, \mathfrak{X}_{i+1}$ zwei anstoßende Dreiecke des Stabwerks, zwei Dreiecke also, die einen Stab $(\mathfrak{X}_i\mathfrak{X}_{i+1})$ gemein haben. Dann besteht zwischen Stabwerk und Drehriß folgender Zusammenhang: der Stab $(\mathfrak{X}_i\mathfrak{X}_{i+1})$ ist parallel zur Strecke $(\mathfrak{x}_i\mathfrak{x}_{i+1})$. Die relative Drehung von $\mathfrak{X}_{i+1}$ gegen $\mathfrak{X}_i$ hat nämlich den Drehvektor $\mathfrak{x}_{i+1} - \mathfrak{x}_i$ und erfolgt um die Achse $(\mathfrak{X}_i\mathfrak{X}_{i+1})$, somit müssen die beiden Geraden wirklich parallel sein.

Es sei anderseits $\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2, \ldots, \mathfrak{X}_n$ eine geschlossene Kette von Dreiecken unseres Fachwerks, so daß je zwei aufeinanderfolgende $\mathfrak{X}_i, \mathfrak{X}_{i+1}$ $(i \bmod n)$ einen Stab $(\mathfrak{X}_i\mathfrak{X}_{i+1})$ gemein haben, und es sei $\mathfrak{p}_{i,i+1}$ ein Punkt dieses Stabes. Für die Drehung von $\mathfrak{X}_{i+1}$ gegen $\mathfrak{X}_i$ gilt

$$\delta\mathfrak{p} = [\mathfrak{p} - \mathfrak{p}_{i,i+1}, \mathfrak{x}_{i+1} - \mathfrak{x}_i].$$

Denkt man sich $\mathfrak{X}_1$ festgehalten und die n Drehungen um die Achsen $(\mathfrak{X}_i, \mathfrak{X}_{i+1})$, $i = 1, 2, \ldots, n$ zusammengesetzt, so muß

$$\delta\mathfrak{p} = \sum_{i=1}^{n} [\mathfrak{p} - \mathfrak{p}_{i,i+1}, \mathfrak{x}_{i+1} - \mathfrak{x}_i] = 0$$

oder

$$\sum_{i=1}^{n} [\mathfrak{p}_{i,i+1}, \mathfrak{x}_{i+1} - \mathfrak{x}_i] = 0 \tag{2}$$

sein.

Es liegt eine statische Deutung des Zusammenhanges zwischen Stabwerk und Drehriß recht nahe. Nehmen wir an, die Dreiecke $\mathfrak{X}_i$ unseres Stabwerks seien in endlicher Zahl vorhanden und mögen ein geschlossenes, zweiseitiges und einfach zusammenhängendes Vielflach bestimmen. Es sei dann $\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2, \ldots, \mathfrak{X}_n$ eine geschlossene Dreieckskette, und wir denken uns das Stabwerk längs der Punkte $\mathfrak{p}_{i,i+1}$ auf den Stäben entzweigeschnitten, wodurch es wegen des einfachen Zusammenhanges in zwei Stücke

[3]) Wegen der unendlich kleinen Bewegungen eines starren Körpers vgl. man irgendein Lehrbuch der Mechanik, z. B. M. Planck, Einführung in die allgemeine Mechanik, Leipzig 1916, S. 151 (348).

erfällt. Denken wir uns auf den Dreiecken des Stabwerks einen positiven Umlaufsinn festgelegt und betrachten wir etwa den Teil des Stabwerks, der bei dem Umlauf $\mathfrak{X}_1, \ldots, \mathfrak{X}_n$ der geschlossenen Kette zur „Linken" bleibt. An den Schnittpunkten $\mathfrak{p}_{i,i+1}$ denken wir uns den Kraftvektor $\mathfrak{x}_{i+1} - \mathfrak{x}_i$ wirksam, der zur Kante $(\mathfrak{X}_i \mathfrak{X}_{i+1})$ durch diesen Punkt parallel ist. Dann ist das Stück unseres Fachwerks im Gleichgewicht, da

$$\sum_{i=1}^{n} \mathfrak{x}_{i+1} - \mathfrak{x}_i = 0$$

und die Bedingung (2) erfüllt ist. Denken wir uns also in jedem Stabe $(\mathfrak{X}_i, \mathfrak{X}_{i+1})$ die Spannung $\mathfrak{x}_{i+1} - \mathfrak{x}_i$ wirksam, so ist das Stabwerk im Gleichgewicht und der Drehriß kann somit als Kräfteplan dieses Systems von Selbstspannungen aufgefaßt werden. Aus dieser statischen Deutung des Drehrisses ergibt sich: die Beziehung (2) ist eine Folge des Parallelismus $(\mathfrak{X}_i \mathfrak{X}_{i+1})$ parallel $(\mathfrak{x}_i \mathfrak{x}_{i+1})$]. Fügt man nämlich zu den Spannungen, die am Rande des eben betrachteten Stabwerkteils angreifen, zu den unzerschnittenen Stäben dieses Teiles die sich paarweise weghebenden Spannungskräfte hinzu, so erhält man ein Kräftesystem im Gleichgewicht, da alle Spannungen, die an demselben Knoten des Fachwerks einwirken, Gleichgewicht halten. Somit gilt:

(I.) *Durch den Parallelismus*: $(\mathfrak{X}_i \mathfrak{X}_{i+1})$ *parallel* $(\mathfrak{x}_i \mathfrak{x}_{i+1})$ *für irgend zwei anstoßende Dreiecke ist der Drehriß gekennzeichnet.* Der Drehriß zieht sich dann auf einen einzigen Punkt zusammen, wenn das ganze Stabwerk augenblicklich als starrer Körper bewegt wird. *Ist ein Stabwerk „wackelig", d. h. läßt es eine unendlich kleine nicht-triviale Beweglichkeit zu, so existiert ein nicht-trivialer Drehriß und umgekehrt.*

Ferner:

(II.) *Ist ein Stabwerk wackelig, so können in ihm Selbstspannungen auftreten, und umgekehrt.*

Nach (I) ist der Zusammenhang zwischen Stabwerk und Drehriß affininvariant. Somit ist die Aufsuchung der wackeligen Achtflache eine Aufgabe der Affingeometrie.

§ 2.

Möbiuspaare.

Suchen wir jetzt den zu einem wackeligen Achtflach gehörigen Drehriß, wobei unter „Achtflach" das eingangs beschriebene Stabwerk aus 8 Dreiecken verstanden ist, das also dieselbe „Zusammensetzung" hat wie ein regelmäßiges Achtflach (Fig. 1)! Wir können die 8 Dreiecke in zwei Gruppen von je vieren teilen, so daß keine zwei aus derselben

Gruppe „anstoßend“ sind, d. h. einen Stab gemein haben. Die Dreiecke der einen Gruppe seien in beliebiger Reihenfolge mit $\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2, \mathfrak{X}_3, \mathfrak{X}_4$ und die der anderen so mit $\mathfrak{Y}_1, \mathfrak{Y}_2, \mathfrak{Y}_3, \mathfrak{Y}_4$ bezeichnet, daß $\mathfrak{X}_i$ und $\mathfrak{Y}_i$ keinen Knoten (keine Ecke) gemein haben. Man kann sich die gegenseitigen Lagenbeziehungen am besten an dem regelmäßigen Achtflach deutlich machen, das in der Fig. 1 dargestellt ist und wo die Dreiecke der einen Gruppe schraffiert sind. In jeder Ecke des Achtflachs stoßen vier Dreiecke $\mathfrak{X}_p, \mathfrak{Y}_q, \mathfrak{X}_r, \mathfrak{Y}_s$ zusammen, wo p, q, r, s eine Anordnung der Zahlen 1, 2, 3, 4 bedeutet.

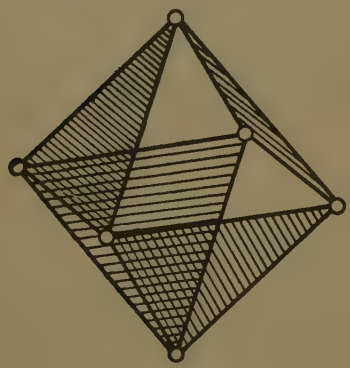


Fig. 1.

Die den Dreiecken $\mathfrak{X}_i, \mathfrak{Y}_i$ zugeordneten Punkte des zu unserem wackeligen Achtflach gehörigen Drehrisses seien entsprechend mit $\mathfrak{x}_i, \mathfrak{y}_i$ bezeichnet. Nach dem im vorigen Abschnitt (§ 1) aufgefundenen Parallelismus zwischen Stabwerk und Drehriß muß dann der Stab $(\mathfrak{X}_i\, \mathfrak{Y}_k)$ parallel zur Strecke $(\mathfrak{x}_i\, \mathfrak{y}_k)$ sein, wenn $i \neq k$; $i, k = 1, 2, 3, 4$. Die von $\mathfrak{x}_i$ ausgehenden drei Strecken $(\mathfrak{x}_i\, \mathfrak{y}_k)$ liegen somit in der Ebene $\mathfrak{X}_i^*$ durch $\mathfrak{x}_i$ parallel $\mathfrak{X}_i$. Die beiden Vierflache $\mathfrak{x}_1\, \mathfrak{x}_2\, \mathfrak{x}_3\, \mathfrak{x}_4$ und $\mathfrak{y}_1\, \mathfrak{y}_2\, \mathfrak{y}_3\, \mathfrak{y}_4$ haben also die Eigenschaft, daß jedes dem andern „umschrieben“ ist. Bedeutet nämlich p, q, r, s irgendeine Anordnung der Zahlen 1, 2, 3, 4, so liegen die vier Punkte $\mathfrak{x}_p, \mathfrak{y}_q, \mathfrak{y}_r, \mathfrak{y}_s$ in einer Ebene $\mathfrak{X}_p^*$ und die vier Punkte $\mathfrak{y}_p, \mathfrak{x}_q, \mathfrak{x}_r, \mathfrak{x}_s$ in einer Ebene $\mathfrak{Y}_p^*$. Solche Vierflachpaare hat A. F. Möbius 1828 entdeckt[4]). Wir haben also zunächst gefunden:

(III.) *Die Seitenflächen eines wackeligen Achtflachs sind parallel zu* 2×4 *Seitenflächen eines Vierflachpaars von Möbius.*

Wir wollen umgekehrt zeigen:

(IV.) *Zu jedem Möbiuspaar, dessen Ecken* $\mathfrak{x}_i, \mathfrak{y}_i$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ *eigentliche Punkte sind, gibt es ein Achtflach* $\mathfrak{X}_i, \mathfrak{Y}_i$, *das dem Möbiuspaar durch Parallelismus entsprechender Kanten* $(\mathfrak{x}_i, \mathfrak{y}_k)$, $(\mathfrak{X}_i, \mathfrak{Y}_k)$, $i \neq k$ *zugeordnet ist, und zwar ist dieses Achtflach bis auf Ähnlichkeiten eindeutig bestimmt.*

Durch das Möbiuspaar ist nämlich ein „Nullsystem“ festgelegt, d. h. eine involutorische Korrelation, die jedem Punkt eine hindurchgehende

---

[4]) Crelles Journal 3 (1828), S. 273 = Werke I, S. 437. Weitere Literatur in der Enzyklopädie: E. Steinitz, Konfigurationen der projektiven Geometrie, III AB 5a, S. 492—493.

ene zuordnet, und zwar dem Punkt $\mathfrak{x}_i$ die Ebene $\mathfrak{X}_i^*$ und dem Punkt $\mathfrak{y}_i$ e Ebene $\mathfrak{Y}_i^*$ [5]).

Nehmen wir nun zwei verschiedene Punkte $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, deren Verbindungsrade durch den Nullpunkt der uneigentlichen Ebene geht! Durch $\mathfrak{x}$ gen wir die Parallelebenen $\mathfrak{X}_i$ zu den Seitenebenen $\mathfrak{X}_i^*$ des einen und rch $\mathfrak{y}$ die Parallelebenen $\mathfrak{Y}_i$ zu den Seitenebenen $\mathfrak{Y}_i^*$ des zweiten Vierchs und behaupten, daß die so bestimmten Ebenen $\mathfrak{X}_i\mathfrak{Y}_i$ bereits die itenebenen eines Achtflachs sind. Dazu genügt der Nachweis: Vier ebenen $\mathfrak{X}_p$, $\mathfrak{X}_q$, $\mathfrak{Y}_r$, $\mathfrak{Y}_s$ gehen, wenn p, q, r, s irgendeine Anordnung der hlen 1, 2, 3, 4 bedeutet, stets durch einen Punkt hindurch. Anders sgedrückt: Die Geraden $(\mathfrak{x}\mathfrak{y})$, $(\mathfrak{X}_p\mathfrak{X}_q)$, $(\mathfrak{Y}_r\mathfrak{Y}_s)$ liegen in einer Ebene. der endlich: Die Gerade $(\mathfrak{x}\mathfrak{y})$ nach dem Nullpunkt der uneigentlichen ene und die Schnittlinien $(\mathfrak{X}_p^*\mathfrak{X}_q^*)$, $(\mathfrak{Y}_r^*\mathfrak{Y}_s^*)$ sind zu derselben Ebene rallel. In der Tat! Die beiden Geraden $(\mathfrak{X}_p^*\mathfrak{X}_q^*)$ und $(\mathfrak{Y}_r^*\mathfrak{Y}_s^*)$ sind rch unser Nullsystem einander zugeordnet, die Verbindungslinie ihrer eigentlichen Punkte entspricht sich daher selbst im Nullsystem, geht o durch den Nullpunkt der uneigentlichen Ebene.

Zur Vervollständigung des Beweises von (IV) zeigen wir noch: Entrechen einem Möbiuspaar $\mathfrak{X}_i^*$, $\mathfrak{Y}_i^*$ durch Parallelismus entsprechender enen zwei verschiedene Achtflache $\mathfrak{X}_i$, $\mathfrak{Y}_i$ und $\mathfrak{X}_i'$, $\mathfrak{Y}_i'$, so sind sie notndig ähnlich und ähnlich gelegen. Jedenfalls gilt das nämlich für die eieckigen Seitenflächen wegen des Parallelismus zugeordneter Kanten d damit auch für die ganzen Achtflache.

Aus (III) und dem Beweis von (IV) folgt:

(V.) *Teilt man die* 8 *Begrenzungsdreiecke* $\mathfrak{X}_i, \mathfrak{Y}_i$; $i = 1, 2, 3, 4$ *eines ckeligen Achtflachs so in zwei Gruppen von je vieren, daß zwei Dreiecke rselben Gruppe keine Kante* (*keinen Stab*) *gemein haben, so gehen die r Ebenen* $\mathfrak{X}_i$ *der einen Gruppe durch denselben Punkt* $\mathfrak{x}$ *und die vier enen der andern durch denselben Punkt* $\mathfrak{y}$.

---

[5]) Man kann das etwa so einsehen: Man nehme die Punkte $\mathfrak{x}_l$ zu Grundpunkten es Systems homogener Koordinaten x_1, x_2, x_3, x_4. Dann wird die Ebene $\mathfrak{X}_i^*$ durch e Gleichung

$$a_{1i}x_1 + a_{2i}x_2 + a_{3i}x_3 + a_{4i}x_4 = 0, \quad a_{ii} = 0$$

gestellt. Die Bedingung, daß je drei Ebenen $\mathfrak{X}_i^*$ sich auf einer Koordinatenebene neiden, ergibt die analytische Beziehung, daß in der Matrix a_{ik} die dreireihigen uptminoren verschwinden. Dann kann man aber die Koeffizienten so normieren, $a_{ik} + a_{ki} = 0$ wird und die Gleichung

$$\sum_{i,k=1}^{4} a_{ik}x_i y_k = 0$$

llt das gesuchte Nullsystem dar.

In der Figur 2 ist der Zusammenhang zwischen einem wackeligen Achtflach und seinem Drehriß in Auf- und Grundriß dargestellt, und zwar ist die Grundrißebene senkrecht zur Richtung $(\mathfrak{x}\,\mathfrak{y})$ nach dem Nullpunkt

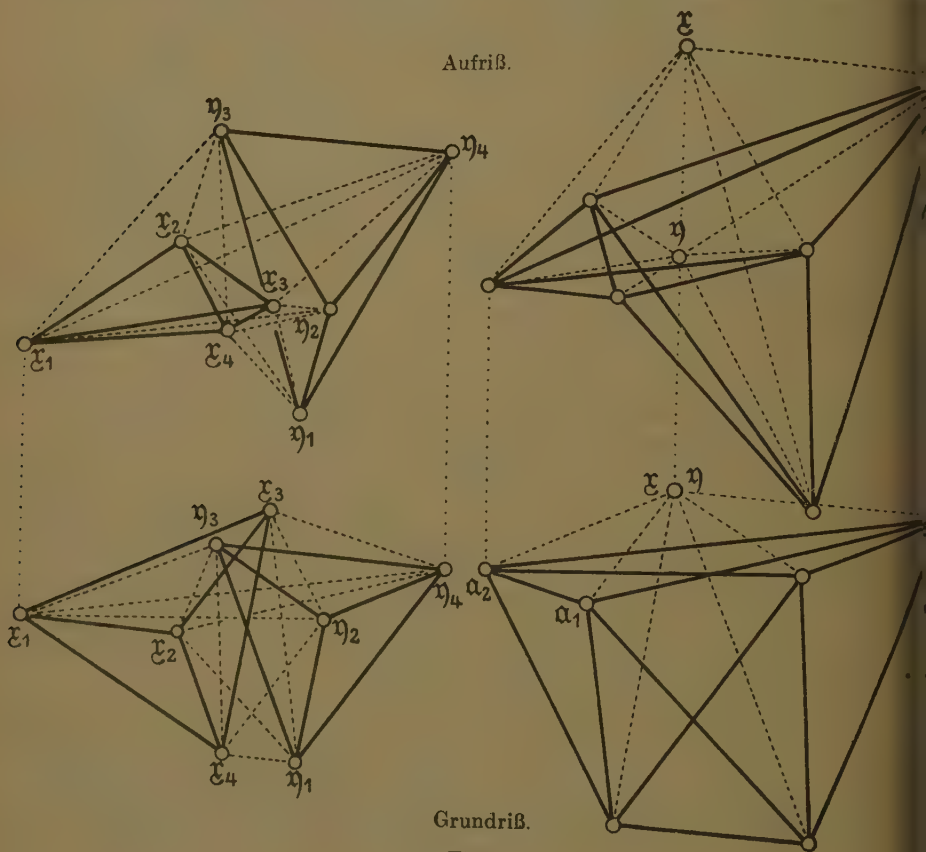


Fig. 2.

der uneigentlichen Ebene gewählt. Die Vierflachskanten und die Achtflachsstäbe sind voll ausgezogen, die Geraden $(\mathfrak{x}_i\,\mathfrak{y}_k)$, $(\mathfrak{X}_i\,\mathfrak{X}_k)$ und $(\mathfrak{Y}_i\,\mathfrak{Y}_k)$ sind punktiert, so daß also im Aufriß immer eine vollgezogene zu einer punktierten Kante parallel ist.

§ 3.

Kennzeichnung der wackeligen Achtflache.

Wir wollen das Ergebnis (V) noch einmal einfacher dadurch herleiten, daß wir nach (II) die Stäbe eines wackeligen Achtflachs gespannt denken. Es sei ein Knoten des Achtflachs herausgeschnitten, indem die Dreiecke $\mathfrak{X}_p$, $\mathfrak{Y}_q$, $\mathfrak{X}_r$, $\mathfrak{Y}_s$ zusammenstoßen. Die beiden Spannungen in den Stäben

$_p\mathfrak{Y}_q$), $(\mathfrak{X}_p\mathfrak{Y}_s)$ halten den beiden Spannungen in $(\mathfrak{X}_r\mathfrak{Y}_q)$, $(\mathfrak{X}_r\mathfrak{Y}_s)$ Gleichwicht, also müssen die Mittelkräfte der ersten beiden und der letzten iden Spannungen die Gerade $(\mathfrak{X}_p\mathfrak{X}_r)$ zur Wirkungslinie haben. Denken r uns jetzt zweitens nicht mehr einen einzelnen Knoten, sondern ein nzes Dreieck, etwa $\mathfrak{X}_1$ von unserem Achtflach dadurch abgetrennt, daß r die Stäbe $(\mathfrak{X}_2\mathfrak{Y}_3)$, $(\mathfrak{X}_2\mathfrak{Y}_4)$; $(\mathfrak{X}_3\mathfrak{Y}_4)$, $(\mathfrak{X}_3\mathfrak{Y}_2)$; $(\mathfrak{X}_4\mathfrak{Y}_2)$, $(\mathfrak{X}_4\mathfrak{Y}_3)$ durchneiden. Die sechs in diesen Stäben wirksamen Spannungen müssen eichgewicht halten. Bilden wir die Mittelkräfte zu je zweien, so sind ch dem eben bewiesenen deren Wirkungslinien $(\mathfrak{X}_1\mathfrak{X}_2)$, $(\mathfrak{X}_1\mathfrak{X}_3)$, $(\mathfrak{X}_1\mathfrak{X}_4)$. diese drei Mittelkräfte ebenfalls Gleichgewicht halten, gehen ihre drei rkungslinien durch einen Punkt, d. h. aber die Ebenen $\mathfrak{X}_1$, $\mathfrak{X}_2$, $\mathfrak{X}_3$, $\mathfrak{X}_4$ ben einen Punkt $\mathfrak{x}$ gemein. Ebenso stellt man fest, daß auch die andern itenebenen $\mathfrak{Y}_i$ durch einen Punkt $\mathfrak{y}$ hindurchgehen.

Anstatt von unserm Achtflach ein Dreieck abzutrennen, hätte es zu serem Zweck auch genügt, einen Stab des Achtflachs etwa $(\mathfrak{X}_1\mathfrak{Y}_2)$ loslösen durch Abschneiden der sechs Stäbe $(\mathfrak{X}_1\mathfrak{Y}_3)$, $(\mathfrak{X}_1\mathfrak{Y}_4)$; $(\mathfrak{X}_3\mathfrak{Y}_4)$, $(\mathfrak{X}_3\mathfrak{Y}_2)$; $\mathfrak{Y}_2)$, $(\mathfrak{X}_4\mathfrak{Y}_3)$. Bildet man hier wieder in der durch die Reihenfolge gedeuteten Art die Mittelkräfte der Spannungen zu je zweien, so ernnt man neuerdings, daß die $\mathfrak{X}_i$ einen Punkt $\mathfrak{x}$ gemein haben. Bei derer Zusammenfassung derselben Spannungen ergibt sich die vereinigte ge der vier Ebenen $\mathfrak{Y}_i$.

Die Abhängigkeit der vier Ebenen $\mathfrak{Y}_i$ folgt übrigens aus der der vier enen $\mathfrak{X}_i$:

(VI.) *Gehen von den acht Seitenebenen eines Achtflachs vier nicht stoßende $\mathfrak{X}_i$ durch einen Punkt $\mathfrak{x}$, so gehen auch die vier andern $\mathfrak{Y}_i$ rch einen Punkt $\mathfrak{y}$.*

Zum Nachweis betrachten wir die Verbindungsgerade $\mathfrak{G}$ der beiden oten $(\mathfrak{X}_1\mathfrak{Y}_2\mathfrak{X}_4\mathfrak{Y}_3)$ und $(\mathfrak{Y}_4\mathfrak{X}_3\mathfrak{Y}_1\mathfrak{X}_2)$. Von den beiden Vierkanten in sen Punkten liegen die vier Kantenpaare $(\mathfrak{X}_1\mathfrak{Y}_2)$, $(\mathfrak{X}_3\mathfrak{Y}_4)$; $(\mathfrak{X}_4\mathfrak{Y}_2)$, $(\mathfrak{X}_3\mathfrak{Y}_1)$; $\mathfrak{Y}_3)$, $(\mathfrak{X}_2\mathfrak{Y}_1)$; $(\mathfrak{X}_1\mathfrak{Y}_3)$, $(\mathfrak{X}_2\mathfrak{Y}_4)$ je in einer Ebene durch $\mathfrak{G}$. Wenn wir n annehmen, daß die vier Ebenen $\mathfrak{X}_i$ durch einen Punkt $\mathfrak{x}$ gehen, so gt auch das Geradenpaar $(\mathfrak{X}_1\mathfrak{X}_4)$, $(\mathfrak{X}_2\mathfrak{X}_3)$ in einer Ebene durch $\mathfrak{G}$. Da er die sechs Schnittgeraden der vier Ebenen $\mathfrak{X}_1$, $\mathfrak{Y}_2$, $\mathfrak{X}_4$, $\mathfrak{Y}_3$ und ebenso der Ebenen $\mathfrak{Y}_4$, $\mathfrak{X}_3$, $\mathfrak{Y}_1$, $\mathfrak{X}_2$ mit $\mathfrak{G}$ durch drei Ebenenpaare einer Inution verbunden werden (Satz von Pappus[6])), so folgt aus dem Zunmenfallen von fünf Ebenenpaaren, daß auch die Verbindungsebene von mit $(\mathfrak{Y}_2\mathfrak{Y}_3)$ zusammenfällt mit der Verbindungsebene von $\mathfrak{G}$ mit $(\mathfrak{Y}_1\mathfrak{Y}_4)$. h. aber: die vier Ebenen $\mathfrak{Y}_i$ gehen wirklich ebenfalls durch einen Punkt $\mathfrak{y}$.

---

[6]) Man vgl. etwa Th. Reye, Die Geometrie der Lage I, Leipzig 1866. S. 123 en oder Enzyklopädie III A B 5, A. Schoenflies, S. 430.

Jetzt wollen wir eine Umkehrung von (III) beweisen:

(VII.) *Zu jedem Achtflach $\mathfrak{X}_i, \mathfrak{Y}_i$, von dem vier nicht anstoßende Seitenebenen $\mathfrak{X}_i$ durch einen Punkt gehen, gibt es ein Möbiuspaar, dessen Seitenebenen $\mathfrak{X}_i^*, \mathfrak{Y}_i^*$ zu denen des Achtflachs parallel sind.*

Nach (VI) gehen auch die Ebenen $\mathfrak{Y}_i$ durch einen Punkt $\mathfrak{y}$. Wir denken uns diese Ebenen so parallel verschoben, daß die verschobenen Ebenen $\mathfrak{Y}_i^*$ nicht mehr durch einen Punkt gehen, sondern Seitenebenen eines Vierflachs mit den Ecken $\mathfrak{x}_i$ sind, wo $\mathfrak{x}_i$ der Ebene $\mathfrak{Y}_i^*$ gegenüberliegt. Es ist zu beweisen, daß die Ebenen $\mathfrak{X}_i^*$ durch die Ecken $\mathfrak{x}_i$ parallel zu den $\mathfrak{X}_i$ ein Vierflach ergeben, das zusammen mit dem Vierflach der $\mathfrak{Y}_i^*$ ein Möbiuspaar bildet. Dazu genügt es einzusehen, daß z. B. die Ebenen $\mathfrak{X}_1^*, \mathfrak{X}_2^*, \mathfrak{X}_3^*$ durch $\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \mathfrak{x}_3$ sich in einem Punkt $\mathfrak{y}_4$ der Ebene $\mathfrak{Y}_4^*$ durch $\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \mathfrak{x}_3$ schneiden. Zum Beweise denken wir uns die Figur parallel zur Geraden $(\mathfrak{x}\,\mathfrak{y})$ auf eine Ebene projiziert (Figur 2). Die Risse (Projektionen) der Punkte seien durch Querstriche gekennzeichnet und die Risse der Schnittpunkte $(\mathfrak{Y}_4\,\mathfrak{X}_3\,\mathfrak{Y}_1\,\mathfrak{X}_2)$, $(\mathfrak{Y}_4\,\mathfrak{X}_1\,\mathfrak{Y}_2\,\mathfrak{X}_3)$, $(\mathfrak{Y}_4\,\mathfrak{X}_2\,\mathfrak{Y}_3\,\mathfrak{X}_1)$ sollen $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3$ heißen. Der Schnittpunkt der Ebenen $\mathfrak{Y}_4^*, \mathfrak{X}_1^*, \mathfrak{X}_2^*$ soll $\mathfrak{y}_4$ benannt werden, dann ist behauptet, daß auch $\mathfrak{X}_3^*$ durch $\mathfrak{y}_4$ geht. In unserm Risse haben wir zwei vollständige Vierecke mit den Ecken $\bar{\mathfrak{x}}_1, \bar{\mathfrak{x}}_2, \bar{\mathfrak{x}}_3, \bar{\mathfrak{y}}_4$ und $\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{a}_2\,\mathfrak{a}_3\,\bar{\mathfrak{x}}$, von denen fünf Seiten parallel sind. Es ist nämlich $(\mathfrak{x}_1\,\mathfrak{x}_2)$ parallel $(\mathfrak{Y}_3\,\mathfrak{Y}_4)$ und daher $(\bar{\mathfrak{x}}_1\,\bar{\mathfrak{x}}_2)$ parallel $\mathfrak{a}_3\,\bar{\mathfrak{y}} = \mathfrak{a}_3\,\bar{\mathfrak{x}}$. Ebenso sind $(\bar{\mathfrak{x}}_2\,\bar{\mathfrak{x}}_3)$, $(\bar{\mathfrak{x}}_3\,\bar{\mathfrak{x}}_1)$ parallel $(\bar{\mathfrak{a}}_1\,\bar{\mathfrak{x}})$, $(\bar{\mathfrak{a}}_2\,\bar{\mathfrak{x}})$. Anderseits ist $(\mathfrak{x}_1\,\mathfrak{y}_4)$ parallel $(\mathfrak{X}_1\,\mathfrak{Y}_4)$, also $(\bar{\mathfrak{x}}_1\,\bar{\mathfrak{y}}_4)$ parallel $(\mathfrak{a}_2\,\mathfrak{a}_3)$ und ebenso ist $(\bar{\mathfrak{x}}_2\,\bar{\mathfrak{y}}_4)$ parallel $(\mathfrak{a}_3\,\mathfrak{a}_1)$. Da die beiden vollständigen Vierecke (wieder nach dem eben angewandten Satz von Pappus) auf der uneigentlichen Geraden dieselbe Involution ausschneiden, muß auch noch das letzte Seitenpaar $(\bar{\mathfrak{x}}_3\,\bar{\mathfrak{y}}_4)$, $(\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{a}_2)$ parallel sein, d. h. also: $\mathfrak{X}_3^*$ geht tatsächlich durch $\mathfrak{y}_4$, w. z. b. w.

Nach (VII) kann man also zu einem Achtflach $\mathfrak{X}_i, \mathfrak{Y}_i$ mit der dort vorausgesetzten Eigenschaft ein Möbiuspaar $\mathfrak{x}_i, \mathfrak{y}_i$ konstruieren, so daß $(\mathfrak{X}_i\,\mathfrak{Y}_k)$ parallel $(\mathfrak{x}_i\,\mathfrak{y}_k)$ ausfällt $(i \neq k)$. Nach (I) ist also bewiesen:

(VIII.) *Ein wackeliges Achtflach ist dadurch gekennzeichnet, daß vier Seitenflächen, die keine Kante gemein haben (und nach (VI) daher auch die vier übrigen), durch einen Punkt gehen.*

§ 4.

Ergänzungen.

Verlangt man, daß durch eine unendlich kleine Deformation eines wackeligen Achtflachs die Bedingung (VIII) der Wackeligkeit nicht gestört wird, so muß man auf die Achtflache Bricards[2]) mit endlicher Be-

glichkeit kommen. Doch soll darauf nicht eingegangen werden, da diese ıtersuchung aus dem Rahmen der Affingeometrie herausfällt.

Ausgehend von (II) könnte man den berühmten Beweis Cauchys[7]) die Starrheit von konvexen Polyedern in der Beschränkung auf unendlich ine Deformationen recht einfach darstellen.

Die Starrheit konvexer Polyeder ist neuerdings unter Benutzung eines tzes von H. Minkowski durch H. Weyl[8]) in besonders schöner Weise f affinem Wege bewiesen worden. Es scheint mir, daß der Beweis von eyl noch etwas weiter reicht als bei Weyl angegeben ist, nämlich nicht r auf konvexe Polyeder anwendbar ist, sondern auf alle Polyeder, die n allen Halbstrahlen von einem festen Punkt aus nur einmal getroffen rden.

Übertragungen der Überlegungen des § 1 von Polyedern auf krumme ächen sind von mir[9]) und von Weyl[8]) gegeben worden. Die Verallmeinerung des „Drehrisses“ auf endliche isometrische Abbildungen krumer Flächen ist von L. Bianchi[10]) und mir[11]) untersucht worden.

Tübingen im Mai 1919.

---

[7]) A. L. Cauchy, Journal de l'école polytechnique, cahier 16, tome 9 (1813), 87—98 oder Werke (2) 1, S. 26—38. Wie mir durch persönliche Mitteilung bent ist, hat H. Liebmann auf Grund von (II) unabhängig vom Gedankengang uchys, erfolgreiche Untersuchungen über die Starrheit konvexer Vielfache angestellt.

[8]) H. Weyl, Über die Starrheit der Eiflächen und konvexen Polyeder, Sitzungsichte Berlin 16 (1917), S. 250—266.

[9]) W. Blaschke, Ein Beweis für die Unverbiegbarkeit geschlossener konvexer chen, Göttinger Nachrichten 1912, S. 607—610.

W. Blaschke, Reziproke Kräftepläne zu den Spannungen in einer biegsamen nt, International Congress of Mathematicians Cambridge 1912, Proceedings Bd. 2, 3, S. 291—294.

[10]) L. Bianchi, Sulle superficie a linee di curvatura isoterme, Accademia dei cei (5) 12, 2. Sem. (1903), S. 511.

[11]) W. Blaschke, Über isometrische Flächenpaare, Jahresbericht der Deutschen thematikervereinigung 22 (1913), S. 154—183.

(Eingegangen am 9. Mai 1919.)

Frenets Formeln für den Raum von Riemann.

Von

Wilhelm Blaschke in Hamburg.

Es soll hier gezeigt werden: In Riemanns Raum, in dem das Bogenelement durch eine quadratische Differentialform

$$ds^2 = \sum_{i,k=1}^{n} g_{ik}\, dx_i\, dx_k$$

erklärt ist, kann man zu jeder Kurve ein begleitendes n-Bein einführen und die invarianten Ableitungen dieser n Vektoren nach der Bogenlänge aus den n Vektoren selbst linear kombinieren. Die auf die Weise erhaltene Verallgemeinerung der Formeln von Frenet sieht ganz so aus wie die speziellen Formeln für den Raum Euklids und die ganze Rechnung verursacht für den allgemeineren Fall der Maßbestimmung Riemanns nur ganz unerheblich mehr Arbeit als für den Euklidischen Sonderfall.

Um mich kurz fassen zu können, will ich mich an die Bezeichnungen von H. Weyl halten, die er in seinem wundervollen Buche „Raum — Zeit — Materie“ (Berlin 1918) gebraucht, insbesondere lasse ich nach einem Vorschlage von A. Einstein die Summenzeichen weg. Die quadratische Grundform sei etwa als positiv definit vorausgesetzt. Längs unserer Raumkurve $x_i = x_i(s)$ denken wir uns zunächst die berührenden Einheitsvektoren

$$\xi^i = \frac{dx}{ds}, \quad g_{ik}\xi^i\xi^k = 1 \tag{1}$$

aufgesucht. Zu einem beliebigen Vektorfeld φ^i kann man dann die Tensoren [vgl. Weyl, S. 104 (I′), bei A. Einstein „Erweiterung“]

$$\psi_k^i = \frac{\partial \varphi^i}{\partial x_k} + \left\{ {k \atop i\ r} \right\} \varphi^r \tag{2}$$

herleiten und daraus durch „Verjüngung“ längs unserer Kurve $x_i(s)$ die Vektoren

$$\psi_k^i \xi^k = \frac{\partial \varphi^i}{\partial x_k}\xi^k + \left\{ {k \atop i\ r} \right\} \xi^k \varphi^r = \frac{d\varphi^i}{ds} + \left\{ {k \atop i\ r} \right\} \xi^k \varphi^r \tag{3}$$

Rechts kommen hierin nur mehr die Vektoren φ^i längs der Kurve $x_i(s)$ vor. Wir haben also einen invarianten Differentiationsprozeß θ gefunden, der ermöglicht, zu jeder längs $x_i(s)$ gegebenen Vektorschar $\varphi^i(s)$ eine neue $\theta\varphi^i(s)$ herzuleiten:

$$4) \qquad \theta\varphi^i = \frac{d\varphi^i}{ds} + \left\{ {k \atop i}\, {r} \right\} \xi^k \varphi^r.$$

Man kann übrigens zu der invarianten Ableitung (4) auch kommen, wenn man von der durch Levi-Civita[1]) angegebenen Erklärung der „Parallelverschiebung" längs einer Kurve $x_i(s)$ im Riemannraum ausgeht, Sind nämlich s und $s + ds = s + \delta s$ zwei benachbarte Punkte der Kurve, so ist [vgl. Weyl, S. 100 (35)]

$$\varphi^i + \delta\varphi^i = \varphi^i - \left\{ {k \atop i}\, {r} \right\} dx_k \cdot \varphi^r$$

der durch Parallelverschiebung von s nach $s + ds$ aus φ^i entstehende Vektor. Dann ist aber

$$4^*) \qquad \frac{\varphi^i(s+ds) - (\varphi^i + \delta\varphi^i)}{ds} = \frac{d\varphi^i}{ds} + \left\{ {k \atop i}\, {r} \right\} \frac{dx_k}{ds} \varphi^r = \theta\varphi^i.$$

Dieser θ-Prozeß soll nun wiederholt auf die Tangentenvektoren $\xi^i = \xi^i_{(1)}$ angewandt werden

$$5) \qquad \theta\xi^i_{(1)} = \xi^i_{(2)}, \qquad \theta\xi^i_{(k-1)} = \xi^i_{(k)}.$$

Dabei setze ich die Fußmarken in Klammern, da sie nichts mit hoch- und tiefständigen Zeigern zu tun haben. Auf diese Weise ist ein die Kurve $x_i(s)$ begleitendes und gegenüber Koordinatentransformationen invariant erklärtes n-Bein $\xi^i_{(k)}$; $k = 1, 2, \ldots, n$ gefunden, das aber noch nicht aus orthogonalen Einheitsvektoren besteht. Wir wollen aber voraussetzen, unsere Kurve sei in dem Sinne „allgemein", daß die n Vektoren $\xi^i_{(k)}$ nicht linear abhängen. Daß dies möglich ist, davon überzeugt man sich sofort im Euklidischen Raum, wenn die x_i ein Cartesisches Achsenkreuz bilden. In diesem Falle sind die Christoffelsymbole alle Null und der θ-Prozeß reduziert sich auf Ableitung nach der Bogenlänge.

Aus dem n-Bein der ξ leiten wir nun durch das Orthogonalisierungsverfahren von E. Schmidt[2]) ein orthogonales n-Bein von Einheitsvektoren η her. Zu dem Zweck sei das „innere Produkt" der Vektoren $\xi^i_{(p)}$, $\xi^i_{(q)}$ mit (p, q) bezeichnet

$$6) \qquad g_{ik}\, \xi^i_{(p)}\, \xi^k_{(q)} = (p, q)$$

---

[1]) T. Levi-Civita, Nozione di parallelismo in una varietà qualunque . . . . Rendiconti di Palermo 42 (1917).

[2]) Man vgl. etwa G. Kowalewskis Determinantentheorie, Leipzig 1909, S. 423 bis 426.

und die Determinante

$$(7) \qquad \begin{vmatrix} (1,1)\,(1,2)\ldots(1,p) \\ (2,1)\,(2,2)\ldots(2,p) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ (p,1)\,(p,2)\ldots(p,p) \end{vmatrix} = D_{(p)}.$$

Nach unserer Voraussetzung ($ds^2 > 0$ und daher $|g_{ik}| > 0$) ist diese Determinante $D_{(p)}$ positiv:

$$(8) \qquad D_p = \|g_{ik}\| \cdot \|\xi^i_{(r)}\|^2 > 0, \quad i,k = 1,2,\ldots,n; \quad r = 1,2,\ldots,p.$$

Das gewünschte normierte Orthogonalsystem der η wird dann durch die Formeln geliefert

$$(9) \qquad \eta^i_{(p)} = \frac{1}{\sqrt{D_{(p-1)}\,D_{(p)}}} \begin{vmatrix} (1,1)\ldots(1,p-1)\,\xi^i_{(1)} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (p,1)\ldots(p,p-1)\,\xi^i_{(p)} \end{vmatrix},$$

$$p = 1,2,\ldots,n; \quad D_0 = 1.$$

(Die Wurzeln kann man dabei etwa alle positiv nehmen.)

In der Tat bestätigt man sofort die Orthogonalität:

$$(10) \qquad g_{ik}\,\eta^i_{(p)}\,\xi^k_{(q)} = 0 \quad \text{und daher} \quad g_{ik}\,\eta^i_{(p)}\,\eta^k_{(q)} = 0$$

für $p > q$. Ferner auf Grund der Orthogonalität die Normierung

$$(11) \qquad g_{ik}\,\eta^i_{(p)}\,\eta^k_{(p)} = 1,$$

indem man bei der Bildung des inneren Produktes alle $\xi^i_{(q)}$, $q < p$ im ersten Faktor durch Nullen ersetzt.

Die η bilden nun das orthogonale unsere Kurve $x_i(s)$ begleitende n-Bein. Als normiertes Orthogonalsystem sind die η linear unabhängig und wir können daher ihre invarianten Ableitungen $\theta\eta$ aus den η linear zusammensetzen:

$$(12) \qquad \theta\eta^i_{(p)} = \alpha_{(pq)}\,\eta^i_{(q)}, \qquad \alpha_{(pq)} = g_{ik}(\theta\eta^i_{(p)})\,\eta^k_{(q)}.$$

So werden die gewünschten Formeln von Frenet aussehen und unsere Aufgabe ist die Berechnung der Koeffizienten α, die, da Alles invariant gerechnet wurde, Invarianten („Krümmungen“) unserer Kurve $x_i(s)$ sein werden.

Zunächst will ich zeigen: Da die η ein normiertes Orthogonalsystem bilden, ist die Matrix der α schiefsymmetrisch. Es ist nämlich

$$(13) \qquad \frac{d}{ds}\,g_{ik}\,\eta^i_{(p)}\,\eta^k_{(q)} = 0.$$

Die linke Seite gibt ausgerechnet

$$\frac{\partial g_{ik}}{\partial x_r}\xi^r \eta^i_{(p)} \eta^k_{(q)} + g_{ik}(\theta \eta^i_{(p)} - \left\{ {h \atop i}\, {l} \right\} \xi^h \eta^l_{(p)})\, \eta^k_{(q)} + g_{ik}(\theta \eta^k_{(q)} - \left\{ {h \atop k}\, {l} \right\} \xi^h \eta^l_{(q)})\, \eta^i_{(p)}.$$

Wegen [Weyl, S. 99 (31), S. 98 (29)]

$$\frac{\partial g_{ik}}{\partial x_r} = \left[{i \atop k}\, {r} \right] + \left[{k \atop i}\, {r} \right], \qquad g_{ik} \left\{ {h \atop i}\, {l} \right\} = \left[{h \atop k}\, {l} \right]$$

olgt weiter

14) $$\frac{d}{ds} g_{ik} \eta^i_{(p)} \eta^k_{(q)} = g_{ik}(\theta \eta^i_{(p)})\, \eta^k_{(q)} + g_{ik} \eta^i_{(p)} (\theta \eta^k_{(q)})$$

nd die Gleichung (13) reduziert sich somit auf unsere Behauptung:

15) $$\alpha_{(pq)} + \alpha_{(qp)} = 0.$$

Ferner: Aus dem Bau der Vektoren η kann man leicht sehen, daß

16) $$\alpha_{(pq)} = 0 \quad \text{für} \quad p < q + 1.$$

In der Tat! $\eta_{(p)}$ ist eine lineare Verbindung der $\xi_{(1)}, \xi_{(2)}, \ldots, \xi_{(p)}$ und omit die invariante Ableitung $\theta \eta_{(p)}$ nur abhängig von $\xi_{(1)}, \xi_{(2)}, \ldots, \xi_{(p+1}$ der, was auf dasselbe hinauskommt, von $\eta_{(1)}, \ldots, \eta_{(p+1)}$.

Nach (15), (16) hat somit die Matrix der α die Gestalt

17) $$\| \alpha_{(pq)} \| = \left\| \begin{array}{ccccc} 0 + \frac{1}{\varrho_{(1)}} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ -\frac{1}{\varrho_{(1)}} & 0 + \frac{1}{\varrho_{(2)}} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\varrho_{(2)}} & 0 + \frac{1}{\varrho_{(3)}} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & + \frac{1}{\varrho_{(n-1)}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \ldots & -\frac{1}{\varrho_{(n-1)}} \quad 0 \end{array} \right\|$$

nd die Formeln (12) von Frenet lauten

18) $$\begin{cases} \theta \eta^i_{(p)} = -\frac{1}{\varrho_{(p-1)}} \eta^i_{(p-1)} + \frac{1}{\varrho_{(p)}} \eta^i_{(p+1)}, \\ \frac{1}{\varrho_{(p)}} = g_{ik}(\theta \eta^i_{(p)})\, \eta^k_{(p+1)}, \quad 0 < p < n; \quad \frac{1}{\varrho_{(0)}} = \frac{1}{\varrho_{(n)}} = 0 \end{cases}$$

Wir haben also nur noch die $n - 1$ „Krümmungen“ $1 : \varrho$ zu berechnen.

Um aus (9) die Ableitungen $\theta \eta$ zu bestimmen, bemerken wir zuerst, aß aus (14), wenn man darin die η durch die ξ ersetzt, folgt

19) $$\frac{d}{ds}(p, q) = (p + 1, q) + (p, q + 1).$$

Ferner folgt aus der Definition (4) von θ die Rechenregel

$$\theta\lambda\xi^i = \frac{d\lambda}{ds}\cdot\xi^i + \lambda\cdot\theta\xi^i. \tag{20}$$

Somit ergibt sich aus (9) durch den θ-Prozeß

$$\left\{\begin{aligned}\eta^i_{(p)} = \frac{d}{ds}\frac{1}{\sqrt{D_{(p-1)}D_{(p)}}}\cdot\sqrt{D_{(p-1)}D_{(p)}}\cdot\eta^i_{(p)} + \\ + \frac{1}{\sqrt{D_{(p-1)}D_{(p)}}}\begin{vmatrix}(1,1) & \dots & (1,p-1) & \xi^i_{(1)}\\ \dots\dots & \dots & \dots\dots & \dots\dots\\ (p+1,1)\dots & \dots & (p+1,p-1) & \xi^i_{(p+1)}\end{vmatrix} + \frac{1}{\sqrt{D_{(p-1)}D_{(p)}}}\begin{vmatrix}(1,1)\dots(1,\\ \dots\dots\\ (p,1)\dots(p,\end{vmatrix}\end{aligned}\right. \tag{21}$$

wenn man die Determinante zuerst nach den ersten „Faktoren" nach Zeilen und dann nach den zweiten nach Spalten ableitet. Bei der Bildung des inneren Produktes mit

$$\eta^k_{(p+1)} = \frac{1}{\sqrt{D_{(p)}D_{(p+1)}}}\begin{vmatrix}(1,1) & \dots & (1,p) & \xi^k_{(1)}\\ \dots\dots & \dots & \dots\dots & \dots\dots\\ (p+1,1)\dots & \dots & (p+1,p) & \xi^k_{(p+1)}\end{vmatrix}$$

beachte man, daß man in (21) rechts alle $\xi_{(q)}$, $q < p+1$ wegen der Orthogonalität zu $\eta_{(p+1)}$ durch Null ersetzen kann. So findet sich das gewünschte Ergebnis

$$\frac{1}{\varrho_{(p)}} = \frac{\sqrt{D_{(p-1)}D_{(p+1)}}}{D_{(p)}}. \tag{22}$$

Man kann statt der kontravarianten Koordinaten φ^i auch durchweg kovariante φ_i verwenden. Anstelle von (4) tritt dann die Formel

$$\theta\varphi_i = \frac{d\varphi_i}{ds} - \left\{\begin{matrix}i & k\\ r\end{matrix}\right\}\xi^k\varphi_r \tag{23}$$

[vgl. Weyl, S. 101 (36)] und die Formeln (18) von Frenet bleiben gültig, wenn man die hochständigen Marken i, k mit tiefständigen vertauscht.

Die Formeln (22) liefern auch die Krümmungen einer Kurve im Raum Euklids bei Verwendung eines beliebigen krummlinigen Koordinatensystems.

Zum Schluß möchte ich noch einige Literaturangaben anfügen. Spezialisiert man unsere Formeln auf ein Cartesisches Achsenkreuz im Raum Euklids und läßt man $n \to \infty$ gehen, so erhält man von G. Kowalewski gefundene Ergebnisse [Les formules de Frenet dans l'espace fonctionnel, C. R. 151 (1910), S. 1338—1340]. Spezialisiert man unsere Formeln auf den nicht-Euklidischen Raum, so erhält man die Frenetschen Formeln für die nicht-Euklidische Geometrie, die für

$n = 3$ zuerst von L. Bianchi angegeben worden sind, Sulle superficie a curvatura nulla in geometria ellittica, Annali di matematica (2) 24 (1896), S. 92—129, bes. S. 101. Für beliebiges n hat G. Kowalewski die Frenetschen Formeln im nicht-Euklidischen Raum aufgestellt, zur Differentialgeometrie . . ., Sitzungsberichte Wien, Math. Nat. Klasse 120 (1911) Abt. II^a 1, S. 531—542. Vgl. auch die von G. Pick veranlaßte Dissertation von E. Stranski, Zur Infinitesimalgeometrie der Kurven im elliptischen Raume, ebenda 121 (1912), Abt. II^a 1, S. 813—827. Die Geometrie der Kurven im R_n bei der durch ein beliebiges Variationsproblem bewirkten Maßbestimmung hat auf Veranlassung C. Carathéodorys kürzlich P. Finsler untersucht: Über Kurven und Flächen in allgemeinen Räumen, Dissertation Göttingen 1918.

Tübingen im Mai 1919.

(Eingegangen am 9. Mai 1919.)

Mittelwertbildung und Reihentransformation.

Von

Ernst Jacobsthal in Berlin.

Es ist bekannt, daß die Differenzenrechnung gestattet, langsam konvergente Reihen in solche von besserer Konvergenz umzuwandeln[1]). In den folgenden Zeilen werden diese Methoden in Beziehung gesetzt zu den aufeinanderfolgenden arithmetischen Mitteln, die man aus den Teilsummen der betrachteten Reihe erhält. Dabei treten besonders solche alternierenden Reihen hervor, bei denen die absoluten Beträge der Glieder mehrfach monotone Reihen bilden, d. h. solche, deren Differenzenreihen aus positiven abnehmenden Gliedern bestehen.

§ 1.

Hilfssätze und Hilfsformeln.

Hilfssatz 1[2]). *Konvergiert die Folge* $\{x_n\}$ *gegen* x, *so konvergiert auch mit wachsendem* n

$$B_n = \frac{\sum_{\lambda=1}^{\infty} x_\lambda y_\lambda^{(n)}}{\sum_{\lambda=1}^{\infty} y_\lambda^{(n)}}$$

gegen x, *falls die Zahlen* $y_\lambda^{(n)}$ *folgende Bedingungen erfüllen*:

a) $\sum_{\lambda=1}^{\infty} |y_\lambda^{(n)}|$ *ist für* $n = 1, 2, \ldots$ *konvergent.*

---

[1]) Vgl. Euler, Differentialrechnung, 2, Kap. I; Markoff, Differenzenrechnung, Kap. 14, S. 178 ff.; Pringsheim, Vorles. über Zahlen- und Funktionenlehre, 1, Zweite Abteilung: Unendl. Reihen mit reellen Gliedern, S. 437 f.

[2]) Vgl. O. Toeplitz. Über allgemeine lineare Mittelbildungen, Prace mat.-fiz. 22 (1911), S. 113–119.

b) Es gibt eine feste positive Zahl g, so daß für jedes $n = 1, 2, \ldots$ stets

$$\sum_{\lambda=1}^{\infty} \left| y_\lambda^{(n)} \right| \leqq g \left| \sum_{\lambda=1}^{\infty} y_\lambda^{(n)} \right|$$

ist.

c) Für $n \geqq n_0$ ist mindestens eine der Zahlen $y_1^{(n)}, y_2^{(n)}, \ldots$ von 0 verschieden.

Daraus folgt in Verbindung mit b), daß $\sum_{\lambda=1}^{\infty} y_\lambda^{(n)} \neq 0$ für $n \geqq n_0$ ist.

d) Bei festem k ist mit $n \to \infty$ auch

$$\frac{y_k^{(n)}}{\sum_{\lambda=1}^{\infty} y_\lambda^{(n)}} \to 0.$$

Bemerkung: *Sind alle $y_\lambda^{(n)} \geqq 0$, so ist b) von selbst erfüllt und a) besagt, daß $\sum_{\lambda=1}^{\infty} y_\lambda^{(n)}$ konvergent sein soll.*

Beweis: Es werde $x_n = x + \varepsilon_n$ gesetzt, so ist $\varepsilon_n \to 0$. Ist dann ε eine beliebig kleine positive Größe, so möge $m = m(\varepsilon) \geqq n_0$ derart bestimmt sein, daß für $n \geqq m$ stets $\varepsilon_n < \varepsilon : 2g$ ist. Ferner bedeute ϑ_m eine positive Größe, die nicht kleiner ist als die größte der Zahlen $|\varepsilon_1|, |\varepsilon_2|, \ldots, |\varepsilon_m|$. Nun sei nach d) die Zahl $m' \geqq m$ so gewählt, daß für $n \geqq m'$

$$\frac{\left| y_\nu^{(n)} \right|}{\left| \sum_{\lambda=1}^{\infty} y_\lambda^{(n)} \right|} < \frac{\varepsilon}{2 m \vartheta_m}$$

ist, falls $\nu = 1, 2, \ldots, m$ ist. Dann wird für $n \geqq m'$

$$|B_n - x| = \left| \frac{\sum_{\lambda=1}^{\infty} x_\lambda y_\lambda^{(n)}}{\sum_{\lambda=1}^{\infty} y_\lambda^{(n)}} - x \right| = \frac{\left| \sum_{\lambda=1}^{\infty} \varepsilon_\lambda y_\lambda^{(n)} \right|}{\left| \sum_{\lambda=1}^{\infty} y_\lambda^{(n)} \right|} \leqq \frac{\sum_{\lambda=1}^{\infty} |\varepsilon_\lambda| \left| y_\lambda^{(n)} \right|}{\left| \sum_{\lambda=1}^{\infty} y_\lambda^{(n)} \right|}$$

$$= \frac{\sum_{\lambda=1}^{m} |\varepsilon_\lambda| \left| y_\lambda^{(n)} \right|}{\left| \sum_{\lambda=1}^{\infty} y_\lambda^{(n)} \right|} + \frac{\sum_{\lambda=m+1}^{\infty} |\varepsilon_\lambda| \left| y_\lambda^{(n)} \right|}{\left| \sum_{\lambda=1}^{\infty} y_\lambda^{(n)} \right|}$$

$$< \vartheta_m \cdot m \cdot \frac{\varepsilon}{2 m \vartheta_m} + \frac{\varepsilon}{2g} \cdot g = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \text{ d. h. } B_n \to x \text{ mit } n \to \infty, \text{ w. z. b. w.}$$

Zusatz: Sind die $y_\lambda^{(n)} \geqq 0$ und erfüllen sie die Bedingungen a) und c), und ist der Hilfssatz unter diesen Voraussetzungen für eine spezielle positive

Nullfolge $\{x_\lambda^{(0)}\}$ richtig, dann ist er für jede konvergente Folge $\{x_\lambda\}$ richtig. Denn ist k ein fester Index, so ist

$$0 \leqq \frac{x_k^{(0)} y_k^{(n)}}{\sum_{\lambda=1}^{\infty} y_\lambda^{(n)}} \leqq \frac{\sum_{\lambda=1}^{\infty} x_\lambda^{(0)} y_\lambda^{(n)}}{\sum_{\lambda=1}^{\infty} y_\lambda^{(n)}} = B_n < \varepsilon x_k^{(0)}$$

für hinreichend großes n, da ja nach Voraussetzung $B_n \to 0$ ist. Also ist

$$0 \leqq \frac{y_k^{(n)}}{\sum_{\lambda=1}^{\infty} y_\lambda^{(n)}} < \varepsilon \quad \text{für} \quad n \geqq \bar{n}(\varepsilon), \quad \text{d. h.}$$

$$\frac{y_k^{(n)}}{\sum_{\lambda=1}^{\infty} y_\lambda^{(n)}} \to 0,$$

falls $n \to \infty$ und k ein fester Index ist. Somit erfüllen die $y_\lambda^{(n)}$ auch Bedingung d), und deshalb gilt der Satz stets. —

Wenn eine gegen x konvergente Folge $x_0^{(1)}, x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \ldots$ gegeben ist, so bilden wir aus je n_1 aufeinanderfolgenden Gliedern derselben das arithmetische Mittel und nennen diese Mittel $x_0^{(2)}, x_1^{(2)}, \ldots$; aus je n_2 aufeinanderfolgenden Gliedern dieser neuen Folge bilden wir wiederum das arithmetische Mittel und erhalten eine weitere Folge $x_0^{(3)}, x_1^{(3)}, x_2^{(3)}, \ldots$ usw.[3]). Jede dieser unendlich vielen Folgen strebt ersichtlich gegen x. Bildet man also die unendliche Matrix

$$\text{(M)} \qquad \begin{pmatrix} x_0^{(1)} & x_0^{(2)} & x_0^{(3)} \ldots \\ x_1^{(1)} & x_1^{(2)} & x_1^{(3)} \ldots \\ x_2^{(1)} & x_2^{(2)} & x_2^{(3)} \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix},$$

so konvergieren daher die Elemente jeder Spalte gegen x. Wir werden zeigen, daß auch die Glieder jeder Zeile gegen x streben und sprechen also aus

Hilfssatz 2[4]). *In der Matrix* (M) *konvergieren die Elemente jeder Reihe gegen* x.

Will man die Beziehungen zwischen den Elementen zweier Nachbarspalten und ebenso die Beziehung zwischen den Gliedern einer Spalte und

[3]) $n_1, n_2, n_3, \ldots$ sind willkürliche natürliche Zahlen $\geqq 2$.

[4]) Der Beweis benutzt im wesentlichen die späteren Gleichungen (4) bis (6) und Hilfssatz 1.

denen der ersten Spalte ausdrücken, so ist es zweckmäßig, von einer Funktion $f(z; p)$ Gebrauch zu machen, die wir folgendermaßen erklären: Es sei p eine positive Zahl und z eine reelle Veränderliche, dann setzen wir

$$(1) \qquad \begin{aligned} f(z;p) &= 1 \quad \text{für} \quad 0 \leqq z < p, \\ &= 0 \quad \text{für} \quad z < 0 \text{ und } z \geqq p. \end{aligned}$$

Verstehen wir dann unter $n_1, n_2, n_3, \ldots$ natürliche Zahlen $\geqq 2$ und ist $n_0 = 1$, so ist

$$(2) \qquad x_\nu^{(k+1)} = \frac{1}{n_k} \sum_\lambda f(\lambda; n_k) x_{\nu+\lambda}^{(k)} \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots;\ \nu = 0, 1, 2, \ldots),$$

wobei man die Summation über alle ganzen Zahlen λ erstrecken kann.

Um die Elemente der $(m+1)$-ten Spalte in (M) durch die der ersten Spalte auszudrücken, hat man (2) wiederholt anzuwenden. Setzt man nun

$$(3) \qquad g_m(k) = \sum_{\lambda_0 + \lambda_1 + \ldots + \lambda_m = k} f(\lambda_0; n_0) f(\lambda_1; n_1) \ldots f(\lambda_m; n_m),$$

wobei die Summation über alle Systeme ganzer Zahlen $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ auszudehnen ist, deren Summe gleich k ist, so ist $g_m(k)$ für jede ganze Zahl k und $m = 0, 1, 2, 3, \ldots$ erklärt. Die fortgesetzte Anwendung von (2) liefert unter Benutzung von (3) folgende Gleichung

$$(4) \qquad x_\nu^{(m+1)} = \frac{1}{n_0 n_1 n_2 \ldots n_m} \sum_{k=0}^{\infty} g_m(k) x_{\nu+k}^{(1)} \qquad (m, \nu = 0, 1, 2, \ldots).$$

Über die Natur der Koeffizienten $g_m(k)$ erhält man Aufschluß, wenn man insbesondere $x_\nu^{(1)} = z^\nu$, $|z| < 1$ setzt, woraus $\lim x_\nu^{(1)} = x = 0$ folgt. In diesem Falle ergibt (2) für $k = 1$ und $k = 2$:

$$x_\nu^{(2)} = \frac{1}{n_1}(z^\nu + z^{\nu+1} + \ldots + z^{\nu+n_1-1}) = \frac{z^\nu}{n_1} \frac{1-z^{n_1}}{1-z},$$

$$x_\nu^{(3)} = \frac{1}{n_1 \cdot n_2} \cdot \frac{1-z^{n_1}}{1-z}(z^\nu + z^{\nu+1} + \ldots + z^{\nu+n_2-1}) = \frac{z^\nu}{n_1 \cdot n_2} \frac{1-z^{n_1}}{1-z} \cdot \frac{1-z^{n_2}}{1-z},$$

usw. Schließlich erhält man $x_\nu^{(m+1)}$ und daher nach (4) folgende Gleichung:

$$x_\nu^{(m+1)} = \frac{1}{n_0 n_1 \ldots n_m} \sum_{k=0}^{\infty} g_m(k) z^{\nu+k} = \frac{z^\nu}{n_0 n_1 \ldots n_m} \frac{1-z^{n_0}}{1-z} \cdot \frac{1-z^{n_1}}{1-z} \ldots \frac{1-z^{n_m}}{1-z}$$
$$(m, \nu = 0, 1, 2, \ldots).$$

Hieraus folgt

$$(5) \qquad F_m(z) = \sum_{k=0}^{\infty} g_m(k) z^k = \prod_{i=0}^{m} \frac{1-z^{n_i}}{1-z} \qquad (m = 0, 1, 2, \ldots).$$

Setzen wir hierin $z = +1$, so erhalten wir

$$(6) \qquad \sum_{k=0}^{\infty} g_m(k) = n_0 n_1 n_2 \ldots n_m \qquad (m = 0, 1, 2, \ldots).$$

Dagegen ergibt $z = -1$:

$$(7) \qquad \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k g_m(k) = \frac{1-(-1)^{n_0 n_1 \dots n_m}}{2} \qquad (m = 0, 1, 2, \dots).$$

Ich erwähne noch die folgenden beiden aus (3) und (5) leicht beweisbaren Gleichungen

$$(8) \quad g_m(k) = \sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty} g_{m-1}(\lambda) f(k-\lambda; n_m)$$
$$= g_{m-1}(k - n_m + 1) + g_{m-1}(k - n_m + 2) + \dots + g_{m-1}(k)$$
$$(m = 1, 2, \dots);$$

$$(9) \quad g_m(k) = g_m(n_0 + n_1 + n_2 + \dots + n_m - m - 1 - k)$$
$$(m = 0, 1, 2, \dots, \; k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Ist $n_1 = n_2 = n_3 = \dots = 2$, dann folgt aus (5), daß $g_m(k) = \binom{m}{k}$ ist. Die Koeffizienten $g_m(k)$ sind also verallgemeinerte Binomialkoeffizienten; die Gleichungen (6) bis (9) gehen für den erwähnten Spezialfall in bekannte Gleichungen über.

Nun kann man im Hinblick auf (6) der Gleichung (4) folgende Form geben:

$$(4a) \qquad x_\nu^{(m+1)} = \frac{\sum_{k=0}^{\infty} g_m(k) x_{\nu+k}^{(1)}}{\sum_{k=0}^{\infty} g_m(k)} \qquad (m, \nu = 0, 1, 2, \dots).$$

Schreibt man hierin für $x_{\nu+k}^{(1)}$ kurz x_{k+1}, so ist $x_\lambda \to x$, und bezeichnet man $g_m(k)$ mit $y_{k+1}^{(m)}$, so gewinnt (4a) die Gestalt

$$(4b) \qquad B_m = x_\nu^{(m+1)} = \frac{\sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k^{(m)}}{\sum_{k=1}^{\infty} y_k^{(m)}}.$$

Wir behaupten nun, daß auf (4b) der erste Hilfssatz anwendbar ist, d. h. $\lim_{m \to \infty} x_\nu^{(m+1)} = x$ ist, womit dann der zweite Hilfssatz bewiesen wäre. Um das nachzuweisen, bemerken wir zunächst, daß die Koeffizienten $y_k^{(m)} \geqq 0$ sind und die Voraussetzungen (a) bis (c) des ersten Hilfssatzes erfüllen. Nach dem zu ihm gemachten Zusatz ist er daher in unserem Falle anwendbar, falls es gelingt, eine spezielle positive Nullfolge $\{x_k\}$ aufzuweisen, für die er gilt. Das ist nun leicht. Setzt man nämlich $x_k = x_{\nu+k-1}^{(1)} = \vartheta^{\nu+k-1}$, wobei $0 < \vartheta < \frac{1}{2}$, also $2 - 2\vartheta > 1$ ist, so ist $\{x_k\}$

eine positive Nullfolge. Dann wird aber nach der (5) vorangehenden Gleichung

$$B_m = x_\nu^{(m+1)} = \frac{\vartheta^\nu}{n_0 n_1 \dots n_m} \cdot \frac{1-\vartheta^{n_0}}{1-\vartheta} \cdot \frac{1-\vartheta^{n_1}}{1-\vartheta} \cdots \frac{1-\vartheta^{n_m}}{1-\vartheta} < \frac{1}{2^m} \frac{1}{(1-\vartheta)^m} = \frac{1}{(2-2\vartheta)^m}.$$

Wegen $2 - 2\vartheta > 1$ folgt daraus $\lim\limits_{m\to\infty} B_m = \lim\limits_{m\to\infty} x_\nu^{(m+1)} = 0$. Damit ist also die Gültigkeit des Hilfssatzes 1 in dem speziellen Fall gezeigt, und deshalb ist dieser Satz auf (4b) infolge des erwähnten Zusatzes stets anwendbar, somit der zweite Hilfssatz bewiesen.

Aus ihm folgt nun allgemein

$$\lim_{m\to\infty} \frac{F_m(z)}{n_0 n_1 \dots n_m} = 0,$$

falls $|z| < 1$ ist, was bisher nur für $0 < z < \frac{1}{2}$ bekannt war[5])

Wir setzen noch für späteren Gebrauch

10) $$C_k^{(m)} = \sum_{\lambda=k}^{\infty} g_m(\lambda) \qquad (m = 0, 1, 2, \dots;\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

sind alle Zahlen $n_1, n_2, n_3, \dots = 2$, so setzen wir $C_k^{(m)} = c_k^{(m)}$. Dann ist

10a) $$c_k^{(m)} = \sum_{\lambda=k}^{\infty} \binom{m}{\lambda} \qquad (m = 0, 1, 2, \dots;\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Wir schließen § 1 mit folgenden Bemerkungen. In üblicher Weise wird in folgenden $\Delta x_n = x_{n+1} - x_n$, $\Delta^2 x_n = \Delta\Delta x_n = x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n, \dots$ gesetzt. Wir bezeichnen dann $(-1)^n \Delta^n x_\lambda$ mit $D^n x_\lambda$, also $Dx_n = x_n - x_{n+1} (D^0 x_\lambda = x_\lambda)$. Dann gelten die bekannten Formeln

11) $$D^n x_\lambda = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} (-1)^k x_{\lambda+k}, \qquad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

12) $$D^n a_\lambda b_\lambda = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} D^{n-k} a_{\lambda+k} D^k b_\lambda$$

---

[5]) Da die Zahlen $y_k^{(m)}$ die Voraussetzung (d) des ersten Hilfssatzes erfüllen, so ist $\lim\limits_{m\to\infty} \frac{g_m(k)}{n_0 n_1 \dots n_m} = 0$. Bezeichnet man die größte der Zahlen $g_m(0), g_m(1), g_m(2), \dots$ mit a_m, und setzt man dann $\frac{a_m}{n_0 n_1 \dots n_m} = b_m$, so folgt leicht $b_1 > b_2 > \dots > 0$, also existiert $\lim\limits_{m\to\infty} b_m$. Vermutlich ist dieser Grenzwert gleich 0. Die Vermutung ist sicher richtig, falls alle Zahlen $n_1, n_2, \dots = 2$ sind, wie aus der Stirlingschen Formel folgt; wenn sie allgemein richtig ist, dann ergibt sich aus ihr sofort, daß bei festem k $\lim\limits_{m\to\infty} \frac{g_m(k)}{n_0 n_1 \dots n_m} = 0$ ist

§ 2.

Anwendung der Mittelwertbildung auf die Teilsummen einer konvergenten Reihe.

Es sei

$$s = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots \tag{1}$$

irgendeine konvergente Reihe[6]). Wir setzen dann ihre Teilsummen

$$a_1 - a_2 + \dots + (-1)^{\nu-1} a_\nu = S_\nu^{(1)} = s_\nu^{(1)} \tag{1a}$$

für $\nu = 1, 2, 3, \dots$ und erklären: $S_0^{(1)} = 0$. Auf die gegen s konvergente Folge $S_0^{(1)}, S_1^{(1)}, S_2^{(1)}, \dots$ wenden wir dann die fortgesetzte Mittelwertbildung an und bezeichnen die *Mittelwerte m-ter Ordnung* mit $S_\nu^{(m+1)}$. Dann ist nach § 1, (4)

$$S_\nu^{(m+1)} = \frac{1}{n_0 n_1 \dots n_m} \sum_{k=0}^{\infty} g_m(k) S_{\nu+k}^{(1)} \qquad (m, \nu = 0, 1, 2, \dots). \tag{2}$$

In Verbindung mit (1a) ergibt sich nach § 1, (10)

$$S_\nu^{(m+1)} = \frac{1}{n_0 n_1 n_2 \dots n_m} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} a_k C_{k-\nu}^{(m)} \qquad (m, \nu = 0, 1, 2, \dots). \tag{3}$$

Bildet man also für die unendliche Reihe (1) die Matrix

$$\begin{pmatrix} S_0^{(1)} & S_0^{(2)} & S_0^{(3)} & \dots \\ S_1^{(1)} & S_1^{(2)} & S_1^{(3)} & \dots \\ S_2^{(1)} & S_2^{(2)} & S_2^{(3)} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix}, \tag{M*}$$

so konvergieren in ihr die Elemente jeder Reihe gegen s (Hilfssatz 2). Also ist

$$\lim_{\nu \to \infty} S_\nu^{(k)} = \lim_{k \to \infty} S_\nu^{(k)} = s. \tag{4}$$

In dem besonderen Falle, in dem alle Zahlen $n_1, n_2, \dots = 2$ sind, setzen wir $S_\nu^{(k)} = s_\nu^{(k)}$. Dann ist

$$s_\nu^{(m+1)} = \frac{1}{2^m} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{m}{k} s_{\nu+k}^{(1)} \qquad (m, \nu = 0, 1, 2, \dots) \tag{2a}$$

$$s_\nu^{(m+1)} = \frac{1}{2^m} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} a_k c_{k-\nu}^{(m)} \qquad (m, \nu = 0, 1, 2, \dots) \tag{3a}$$

Es ist dann

$$s_\nu^{(m+1)} = \frac{1}{2} \left\{ s_\nu^{(m)} + s_{\nu+1}^{(m)} \right\} \qquad (m = 1, 2, \dots;\ \nu = 0, 1, 2, \dots) \tag{5}$$

[6]) Die Glieder der Reihe können dabei auch komplexe Zahlen sein.

Bildet man nun nach (2a) die Differenz $\Delta_\nu s_\nu^{(m+1)} = s_{\nu+1}^{(m+1)} - s_\nu^{(m+1)}$, obei der Index ν am Differenzensymbol zum Ausdruck bringt, daß die ifferenzenbildung sich auf die Veränderung der Marke ν bezieht, so folgt § 1, (11)):

$$\Delta_\nu s_\nu^{(m+1)} = \frac{(-1)^\nu}{2^m} D^m a_{\nu+1} \qquad (m, \nu = 0, 1, 2, \ldots).$$

rsetzt man hierin ν durch $\nu + 1$ und verbindet dann durch Addition (6) it der so neu entstehenden Gleichung, so ist

$$s_{\nu+2}^{(m+1)} - s_\nu^{(m+1)} = \frac{(-1)^\nu}{2^m} D^{m+1} a_{\nu+1} \qquad (m, \nu = 0, 1, 2, \ldots).$$

us (5) ergibt sich ferner $\Delta_m s_\nu^{(m)} = \frac{1}{2} \Delta_\nu s_\nu^{(m)}$ und deshalb nach (6)

$$\Delta_m s_\nu^{(m)} = \frac{(-1)^\nu}{2^m} D^{m-1} a_{\nu+1} \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots;\ m = 1, 2, \ldots).$$

ummiert man in (7) über $m = 1, 2, \ldots, n-1$, so folgt

$$s_\nu^{(n)} = s_\nu^{(1)} + (-1)^\nu \sum_{k=1}^{n-1} \frac{D^{k-1} a_{\nu+1}}{2^k}, \quad (\nu = 0, 1, 2, \ldots;\ n = 2, 3, \ldots)$$

a man nach (4) hierin mit $n \to \infty$ zur Grenze übergehen kann, so erbt sich die Eulersche Transformation der Reihe (1) aus (8):

$$s = s_\nu^{(1)} + (-1)^\nu \sum_{k=1}^{\infty} \frac{D^{k-1} a_{\nu+1}}{2^k} \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots).$$

er zweite Summand auf der rechten Seite dieser Gleichung stellt demch die Reihe $(-1)^\nu a_{\nu+1} + (-1)^{\nu+1} a_{\nu+2} + \ldots$ dar. Für $\nu = 0$ ist insesondere

$$s = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{D^{k-1} a_1}{2^k}.$$

Während (6), (6a) und (7) gestatten, die höheren Differenzen der durch die höheren Teilsummen auszudrücken, lassen sich diese selbst ittels (8) durch jene ausdrücken.

Eng zusammen mit den Gleichungen (8) bis (8b) hängen die Forln[7])

$$s = s_1^{(n)} - \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=1}^{\infty} D^n a_{2k}$$

$$s = s_0^{(n)} + \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=1}^{\infty} D^n a_{2k-1} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

[7]) Vgl. z. B. Pringsheim, l. c.

Sie sind offenbar für $n = 1$ richtig; verbindet man die beiden Gleichungen (9) additiv unter Benutzung von (5), so erhält man die zweite Gleichung (9) für den nächst höheren Zeiger $(n+1)$. Führt man dieselbe Rechnung aber durch, nachdem man vorher in der zweiten Gleichung (9) auf der rechten Seite das erste Summenglied abgespalten hat, und verwendet man dann noch neben (5) die Gleichung (7), so erhält man die erste Gleichung (9) für den nächst höheren Index $(n+1)$. Wenn (9) also für n richtig ist, so gelten diese Gleichungen auch für $(n+1)$, und da sie für $n = 1$ richtig sind, so sind sie für jedes n erfüllt. Aus (9) folgt wegen (4), daß

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=1}^{\infty} D^n a_{2k} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=1}^{\infty} D^n a_{2k-1} = 0$$

ist. Da nach (8) und (8a)

$$s = s_1^{(n)} - \sum_{k=n}^{\infty} \frac{D^{k-1} a_2}{2^k} = s_0^{(n)} + \sum_{k=n}^{\infty} \frac{D^{k-1} a_1}{2^k} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

ist, so lehrt der Vergleich von (9) mit diesen Gleichungen, daß

$$(10) \qquad \begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} D^n a_{2k} &= \sum_{k=n}^{\infty} \frac{D^{k-1} a_2}{2^{k+1-n}} \\ \sum_{k=1}^{\infty} D^n a_{2k-1} &= \sum_{k=n}^{\infty} \frac{D^{k-1} a_1}{2^{k+1-n}} \end{aligned} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

Die Gültigkeit der entwickelten Formeln, insbesondere der Gleichungen (8a) *und* (8b) (*Eulersche Transformation*), *ist nur an die Voraussetzung geknüpft, daß Reihe* (1) *konvergiert.*

§ 3.

Monotone Folgen[8]).

Es sei $b_1, b_2, b_3, \ldots$ eine Folge mit der Eigenschaft, daß $D^\lambda b_\mu >$ ist für jedes μ der Reihe $1, 2, 3, \ldots$ und jedes λ der Reihe $0, 1, 2, \ldots,$ dann heißt die Folge $\{b_\mu\}$ eine *r-fach monotone Folge.* Sie wird aber *vollmonoton* genannt, falls die Beziehung $D^\lambda b_\mu > 0$ sogar für jedes $\lambda \geqq 0$ gilt. Als Beispiele vollmonotoner Folgen seien erwähnt:

1. $1, x, x^2, \ldots$ fur $0 < x < 1$; es ist

$$D^\lambda x^\mu = (1-x)^\lambda \cdot x^\mu > 0,$$

[8]) In diesem Paragraphen werden nur reelle Größen in Betracht gezogen.

2. $a_\lambda = \frac{1}{p\lambda+q}$, $\lambda = 1, 2, \ldots$; $p+q>0$, $p>0$; hier ist

$$D_\lambda^n \frac{1}{p\lambda+q} = \frac{p^n n!}{\prod_{t=0}^{n} \{p\lambda+q+pt\}} > 0;$$

3. $\frac{1}{\ln 2}, \frac{1}{\ln 3}, \frac{1}{\ln 4}, \ldots$; daß diese Reihe vollmonoton ist, ergibt ch leicht aus folgendem Satz, mit dessen Hilfe man auch leicht die ıderen Beispiele hätte behandeln können.

Satz: *Ist $\varphi(x)$ eine für $x \geqq a > 0$ erklärte reelle positive und unschränkte differenzierbare Funktion, für die stets* $\operatorname{sign} \varphi^{(n)}(x) = (-1)^n$ *t, so ist bei positivem h die Folge*

$$\varphi(a), \quad \varphi(a+h), \quad \varphi(a+2h), \quad \ldots$$

llmonoton.

Die Richtigkeit des Satzes folgt sofort aus der bekannten Gleichung

$$D^n \varphi(x) = (-1)^n h^n \varphi^{(n)}(\xi),$$

obei ξ ein Zwischenwert zwischen x und $x+nh$ ist. Denn diese Gleiıung lehrt, daß $D^n \varphi(x) > 0$ ist. Verwendet man diesen Satz bei der unktion $\varphi(x) = \frac{1}{\ln x}$, so ergibt sich das dritte Beispiel.

Nach § 1, (12) erhält man sofort den

Kompositionssatz: *Sind $\{a_\lambda\}$, $\{b_\lambda\}$ vollmonotone Folgen, so ist uch $\{a_\lambda b_\lambda\}$ eine ebensolche Folge.*

Daß $\{a_\lambda + b_\lambda\}$ ebenfalls vollmonoton ist, ist ja klar.

Das gibt ein Mittel an die Hand, aus unseren Beispielen beliebig ele andere zu bilden. Ferner ist leicht zu zeigen: Ist $\{a_\lambda\}$ vollonoton, so ist in

$$\begin{array}{ccccccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & \ldots \\ Da_1 & Da_2 & Da_3 & Da_4 & \ldots & \\ D^2a_1 & D^2a_2 & D^2a_3 & \ldots & & \\ \ddots & \ddots & \ddots & & & \end{array}$$

de unendliche Folge einer wagerechten oder schrägen Reihe wieder von rselben Beschaffenheit; und ist $a_1, Da_1, D^2a_1, \ldots$ vollmonoton, so lt das gleiche von $a_1, a_2, \ldots$

Ist nun bei der Reihe (1) des § 2 die Folge der absoluten Beträge r Glieder, d. h. $a_1, a_2, a_3, \ldots$, mehrfach monoton, so hat die Matrix

$$M^* = (S_\nu^{(k)})$$

s vorigen Paragraphen besondere Eigenschaften, die wir jetzt entwickeln ollen. Es handelt sich dabei um eine Verallgemeinerung der Tatsache,

daß $S_0^{(1)} < S_2^{(1)} < S_4^{(1)} < \ldots < \ldots < S_5^{(1)} < S_3^{(1)} < S_1^{(1)}$ ist, falls die Folge $\{a_\nu\}$ einfach monoton ist. Um den Satz bequem aussprechen zu können, nennen wir eine gegen x konvergente Folge $x_0, x_1, x_2, \ldots$ *alternierend*, falls $x_0 < x_2 < x_4 < \ldots < \ldots < x_5 < x_3 < x_1$ ist. Dann behaupten wir folgenden

Satz: *Bildet man zu der konvergenten*[9]) *Reihe* $s = a_1 - a_2 + a_3 - \ldots$, *in der die Folge* $\{a_\nu\}$ *r-fach (voll-) monoton ist, die Matrix*

$$(\mathbf{M}^*) \qquad \begin{pmatrix} S_0^{(1)} & S_0^{(2)} & S_0^{(3)} & \ldots \\ S_1^{(1)} & S_1^{(2)} & S_1^{(3)} & \ldots \\ S_2^{(1)} & S_2^{(2)} & S_2^{(3)} & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix},$$

so ist in ihr jede Gliederfolge in einer der r ersten Spalten (in allen Spalten) alternierend. Betrachtet man aber von der Matrix nur die ersten $(r+1)$ *Spalten, so wachsen in dieser Teilmatrix die Glieder der ersten, dritten, fünften, ... Zeile*[10]), *während die der anderen Zeilen abnehmen. (Ist* $\{a_\nu\}$ *vollmonoton, so gilt dieser zweite Teil des Satzes für die unverkürzten Zeilen der Matrix* $\mathbf{M}^*$.)

Beweis: Wir bemerken zuerst, daß der zweite Teil des Satzes eine Folge des ersten ist; denn alternieren etwa die Elemente der λ-ten Spalte, d. h. ist $S_0^{(\lambda)} < S_2^{(\lambda)} < \ldots < S_3^{(\lambda)} < S_1^{(\lambda)}$, und bildet man zu $S_\nu^{(\lambda)}$ den rechten Nachbarn in der Matrix $\mathbf{M}^*$, also

$$S_\nu^{(\lambda+1)} = \frac{1}{n_\lambda}\{S_\nu^{(\lambda)} + S_{\nu+1}^{(\lambda)} + \ldots + S_{\nu+n_\lambda-1}^{(\lambda)}\},$$

so ist bei geradem ν das erste Glied in der Klammer kleiner als alle übrigen und deshalb $S_\nu^{(\lambda+1)} > S_\nu^{(\lambda)}$; bei ungeradem ν aber ist ebenso $S_\nu^{(\lambda+1)} < S_\nu^{(\lambda)}$, und daraus folgt der zweite Teil des Satzes, falls der erste richtig ist. Ferner bemerken wir, daß wir nur den Fall einer r-fach monotonen Folge $\{a_\nu\}$ zu betrachten, da der andere Fall einer vollmonotonen Folge sich aus jenem ergibt.

Für den Beweis des ersten Teiles setzen wir

$$(1) \qquad (-1)^\nu D_\nu S_{\nu-1}^{(m)} = (-1)^\nu (S_{\nu-1}^{(m)} - S_\nu^{(m)}) = f_{m,\nu}^{(0)} \qquad (m, \nu = 1, 2, 3, \ldots).$$

Dann ist insbesondere

$$(1a) \qquad f_{1,\nu}^{(0)} = a_\nu \qquad (\nu = 1, 2, \ldots).$$

[9]) Falls $\lim_{\nu\to\infty} a_\nu > 0$, die Reihe also divergiert, gilt der Satz auch.

[10]) Das sind die Zeilen mit geradem unteren Zeiger.

Weiter sei

$$f_{m,\nu}^{(\lambda)} = D_\nu^\lambda f_{m,\nu}^{(0)} \qquad (\lambda = 0, 1, 2, \ldots;\ m, \nu = 1, 2, \ldots).$$

Somit folgt für $\lambda = 1$:

$$f_{m,\nu}^{(1)} = (-1)^\nu (S_{\nu-1}^{(m)} - S_\nu^{(m)}) - (-1)^{\nu+1}(S_\nu^{(m)} - S_{\nu+1}^{(m)})$$
$$= (-1)^\nu (S_{\nu-1}^{(m)} - S_{\nu+1}^{(m)}), \quad \text{d. h.}$$

$$f_{m,\nu}^{(1)} = (-1)^\nu (S_{\nu-1}^{(m)} - S_{\nu+1}^{(m)}) \qquad (m, \nu = 1, 2, \ldots). \tag{2a}$$

Zwischen den Zahlen $f_{m,\nu}^{(\lambda)}$ besteht nun folgende Gleichung:

$$f_{m+1,\nu}^{(\lambda)} = \frac{1-(-1)^{n_m}}{2n_m} f_{m,\nu+n_m-1}^{(\lambda)} + \frac{1}{n_m} \sum_{\mu=0}^{\left[\frac{n_m-2}{2}\right]} f_{m,\nu+2\mu}^{(\lambda+1)} \tag{3}$$
$$\left(\begin{matrix}\lambda = 0, 1, 2, \ldots \\ m, \nu = 1, 2, \ldots\end{matrix}\right);$$

denn sie ist zunächst einmal für $\lambda = 0$ richtig; setzt man nämlich für diesen Fall in (3) links und rechts für $f_{\varrho,\sigma}^{(\tau)}$ $(\tau = 0, 1)$ die Ausdrücke aus (1) und (2a) ein, so ergibt sich links: $(-1)^\nu (S_{\nu-1}^{(m+1)} - S_\nu^{(m+1)})$ und rechts nach einer einfachen Rechnung: $(-1)^\nu \frac{1}{n_m}(S_{\nu-1}^{(m)} - S_{\nu+n_m-1}^{(m)})$, und diese Ausdrücke sind auf Grund der ersten im Beweis vorkommenden Gleichung wirklich einander gleich. Da nun nach (2) offenbar $D_\nu f_{m,\nu}^{(\lambda)} = f_{m,\nu}^{(\lambda+1)}$ ist, so folgt aus (3), wenn man links und rechts bezüglich ν die Differenz D_ν bildet, die Gleichung (3) erneut, nur mit der Abweichung, daß überall $(\lambda+1)$ ersetzt ist. Ist also (3) für $\lambda = 0$ richtig, so ist diese Gleichung es auch für $\lambda = 1$ und deshalb für $\lambda = 2$ usw.

An die Gleichung (3)[11]) knüpfen wir nun alle weiteren Folgerungen. Ist nämlich $\{a_\nu\}$ r-fach monoton, so ist nach den Gleichungen (1a) und (2) $f_{1,\nu}^{(\lambda)} > 0$ für jedes λ der Reihe $0, 1, 2, \ldots, r$ und $\nu \geqq 1$; setzt man nun in (3) $m = 1$ und für λ die Werte $0, 1, 2, \ldots, r-1$, so ist die rechte Seite in (3) positiv, also auch die linke, d. h. es ist $f_{2,\nu}^{(\lambda)} > 0$ für $\lambda = 0, 1, 2, \ldots, r-1$. Setzt man jetzt in (3) $m = 2$ und λ gleich einem

[11]) Die Gleichung (3) führt durch wiederholte Anwendung zu

$$f_{m+1,\nu}^{(\lambda)} = \sum_k p_{k,0} D^\lambda a_{\nu+k} + \sum_k p_{k,1} D^{\lambda+1} a_{\nu+k} + \ldots + \sum_k p_{k,m} D^{\lambda+m} a_{\nu+k}, \tag{4}$$
$$\left(\begin{matrix} m, \lambda = 0, 1, 2, \ldots \\ \nu = 1, 2, 3, \ldots\end{matrix}\right).$$

Darin sind die $p_{k,\mu} \geqq 0$ und mindestens einer > 0; ferner sind sie von ν unabhängig und der von ν ebenfalls unabhängige Summationsbuchstabe k durchläuft in jeder Summe von 0 an gewisse Werte. Aus (4) folgt leicht (5a) und (5b).

der Werte $0, 1, 2, \ldots, r-2$, so erkennt man entsprechend, daß für diese Werte stets $f_{3,\nu}^{(\lambda)} > 0$ ist. Indem man so fortfährt, gelangt man zusammenfassend zu folgenden Bedingungen:

$$(5a) \qquad f_{m+1,\nu}^{(0)} = (-1)^\nu (S_{\nu-1}^{(m+1)} - S_\nu^{(m+1)}) > 0 \qquad \begin{pmatrix} m = 0, 1, 2, \ldots, r \\ \nu = 1, 2, \ldots \end{pmatrix};$$

$$(5b) \qquad f_{m+1,\nu}^{(1)} = (-1)^\nu (S_{\nu-1}^{(m+1)} - S_{\nu+1}^{(m+1)}) > 0 \qquad \begin{pmatrix} m = 0, 1, 2, \ldots, r-1 \\ \nu = 1, 2, \ldots \end{pmatrix}.$$

Aus (5b) ergibt sich nun, wenn man $\nu = 2, 4, 6, \ldots$ setzt: $S_1^{(m+1)} > S_3^{(m+1)} > S_5^{(m+1)} > \ldots$, $(m = 0, 1, \ldots, r-1)$. Dagegen ergibt sich für $\nu = 1, 3, 5, \ldots$: $S_0^{(m+1)} < S_2^{(m+1)} < S_4^{(m+1)} < \ldots$, $(m = 0, 1, 2, \ldots, r-1)$. Da beide Folgen gegen s streben, schließt man weiter: $S_0^{(m+1)} < S_2^{(m+1)} < S_4^{(m+1)} < \ldots < \ldots < S_5^{(m+1)} < S_3^{(m+1)} < S_1^{(m+1)}$, $(m = 0, 1, \ldots, r-1)$, was sich auch unter Zuhilfenahme von (5a) ohne Benutzung der Tatsache der Konvergenz ergeben würde. Damit ist gezeigt, daß in M^* die ersten r Spalten alternieren und somit der Satz bewiesen.

Wir bemerken zu dem vorstehenden Beweise noch, daß er sich in dem Falle, in dem $n_1 = n_2 = n_3 = \ldots = 2$ ist, viel leichter führen läßt. Dann ergeben sich nämlich die wesentlichen Ungleichheiten (5a) und (5b) einfach aus den Gleichungen (6) und (6a) des § 2. Auch der Teil des Satzes, der sich auf die Zeilen bezieht, ist dann eine unmittelbare Folge der Gleichung (7) in § 2. Ja, es folgt dann sogar, daß die Zeilenbehauptung richtig bleibt, wenn man die Teilmatrix betrachtet, die aus den $(r+2)$ ersten Spalten der Matrix M^* besteht.

Aus (5a) folgt auf Grund von § 2, (2) noch leicht: Ist $\sum_{\lambda=0}^{\infty} \binom{m}{\lambda} (-1)^\lambda a_{\nu+\lambda} > 0$ für $\nu = 1, 2, \ldots$ und $m = 0, 1, \ldots, r$, so ist auch $\sum_{\lambda=0}^{\infty} g_m(\lambda) (-1)^\lambda a_{\nu+\lambda} > 0$ für $\nu = 1, 2, \ldots$ und $m = 0, 1, 2, \ldots, r$.

Die Eulersche Transformation ist gerade in dem Falle von Bedeutung, in dem $\{a_\nu\}$ vollmonoton ist; denn dann läßt sich über die erzielte Genauigkeit etwas aussagen. Nach § 2, (8) und (8a), ist nämlich

$$(6) \qquad s - s_\nu^{(n)} = (-1)^\nu \sum_{k=n}^{\infty} \frac{D^{k-1} a_{\nu+1}}{2^k} \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots;\ n = 1, 2, \ldots).$$

Da nun $\{a_\nu\}$ vollmonoton ist, ist $D^\lambda a_\mu < D^{\lambda-1} a_\mu$, und deswegen folgt

$$(7) \qquad 0 < (-1)^\nu (s - s_\nu^{(n)}) < \frac{D^{n-1} a_{\nu+1}}{2^n} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots\right) = \frac{D^{n-1} a_{\nu+1}}{2^{n-1}} < \frac{D^{n-2} a}{2^{n-1}}$$

Der Ausdruck $s_\nu^{(n)}$ stellt also den Wert s mit einem Fehler dar, der kleiner ist als das Doppelte des ersten nicht benutzten Gliedes $\frac{D^{n-1} a_{\nu+1}}{2^n}$.

der mit geringerer Schärfe: der kleiner ist als das letzte in $s_\nu^{(n)}$ auf-retende Reihenglied $\frac{D^{n-2}a_{\nu+1}}{2^{n-1}}$. Will man also insbesondere aus der Gleichung $s=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{D^{k-1}a_1}{2^k}$ den Wert s mit einem Fehler $<\varepsilon$ berechnen, so hat man in der Folge

$$\frac{D^0 a_1}{2},\quad \frac{D a_1}{4},\quad \frac{D^2 a_1}{8},\ \ldots,\ \frac{D^{k-1}a_1}{2^k},\ \ldots$$

vor dem Gliede aufzuhören, daß $<\frac{\varepsilon}{2}$ ist und die vor diesem Gliede stehenden Elemente der Folge zu addieren.

Ich füge noch folgende Bemerkungen hinzu: Da stets

$$s_{2\nu}^{(k+1)}=\tfrac{1}{2}\left\{s_{2\nu}^{(k)}+s_{2\nu+1}^{(k)}\right\}<s$$

ist, so folgt

$$0<s_{2\nu+1}^{(k)}-s<s-s_{2\nu}^{(k)},$$

d. h. von zwei Nachbarelementen einer Spalte in M^*[12]) ist stets das der bessere Näherungswert, das einen ungeraden unteren Index hat.

Will man bei beliebigem $n_1, n_2, \ldots$ eine Abschätzung für den Unterschied zweier Nachbarelemente einer Spalte in M^* haben, so ergibt sich leicht eine solche aus Gleichung (1). Denn wir erhalten zunächst durch Summation aus

$$D S_{\nu-1}^{(m)}=(-1)^\nu f_{m,\nu}^{(0)},$$

daß

$$S_0^{(m)}-S_\mu^{(m)}=\sum_{\nu=1}^{\mu}(-1)^\nu f_{m,\nu}^{(0)}$$

ist. Und hieraus: $S_\mu^{(m)}-S_{\mu+p}^{(m)}=$

$$\sum_{\nu=\mu+1}^{\mu+p}(-1)^\nu f_{m,\nu}^{(0)}=(-1)^{\mu+1}\left(f_{m,\mu+1}^{(0)}-f_{m,\mu+2}^{(0)}+\ldots+(-1)^{p-1}f_{m,\mu+p}^{(0)}\right)$$

$$(\mu=0,1,2,\ldots;\ m,p=1,2,\ldots).$$

Da nun $\{a_\nu\}$ vollmonoton ist, ist $\{f_{m,\nu}^{(0)}\}_{\nu=1,2,\ldots}$ eine vollmonotone Folge; also ist:

$$\left|S_\mu^{(m)}-S_{\mu+p}^{(m)}\right|<f_{m,\mu+1}^{(0)}=\left|D_\mu S_\mu^{(m)}\right|\qquad(\mu=0,1,2,\ldots;\ m,p=1,2,3,\ldots).$$

Insbesondere gilt dies für $p=n_m$. Daher ist wegen

$$D_\nu S_\nu^{(m+1)}=S_\nu^{(m+1)}-S_{\nu+1}^{(m+1)}=\frac{1}{n_m}\left(S_\nu^{(m)}-S_{\nu+n_m}^{(m)}\right),$$

$$\left|D_\nu S_\nu^{(m+1)}\right|=\frac{1}{n_m}\left|S_\nu^{(m)}-S_{\nu+n_m}^{(m)}\right|<\frac{1}{n_m}\left|D_\nu S_\nu^{(m)}\right|,$$

[12]) $n_1=n_2=\ldots=2$.

d. h.

$$(8) \qquad |D_\nu S_\nu^{(m+1)}| < \frac{1}{n_m} |D_\nu S_\nu^{(m)}| \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots;\ m = 1, 2, \ldots)$$

und daraus ergibt sich

$$(8a) \qquad |D_\nu S_\nu^{(m+1)}| < \frac{|D_\nu S_\nu^{(1)}|}{n_1 \cdot n_2 \ldots n_m} \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots;\ m = 1, 2, \ldots)$$

Will man eine gegebene alternierende Reihe, bei der die absoluten Beträge der Glieder vollmonoton sind, mit Hilfe der Eulerschen Transformation berechnen, also nach der Formel

$$s = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{D^{k-1} a_1}{2^k},$$

so hat man zuerst die einzelnen Differenzen $D^0 a_1 = a_1$, $D a_1$, $D^2 a_1, \ldots$ zu berechnen und dann nach Division durch die zugehörigen Potenzen von 2 zu addieren. In denjenigen Fällen, in denen man für diese Differenzen leicht angebbare Ausdrücke besitzt, die bequem zu berechnen sind, wird dieser Weg wohl am einfachsten sein. So ist es z. B. bei $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$ und ähnlichen Reihen. Hat man aber solche Ausdrücke nicht, so muß man sich die Differenzen durch fortgesetzte Subtraktionen berechnen; man erhält dann bekanntlich ein Schema von folgender Form:

In der ersten Spalte stehen die absoluten Beträge $a_\nu = D^0 a_\nu$ der Glieder der Reihe $a_1 - a_2 + a_3 - \ldots$ In den folgenden Spalten stehen die ersten, zweiten, usw. Differenzen $D a_\nu$, $D^2 a_\nu, \ldots$

Die zu benutzenden Differenzen sind in jeder Spalte aus der ersten Zeile zu entnehmen; man kann aber statt dessen ebensogut die fortgesetzten arithmetischen Mittel $s_\nu^{(n)}$ oder statt dessen $2^{n-1} s_\nu^{(n)}$ durch fortgesetzte Addition bilden. Das hat dann den Vorteil, daß jede einzelne Zahl des Schemas nach Division durch die betreffende Potenz von 2 einen Näherungswert für die Reihe ergibt und man aus Nachbarelementen einer Spalte eine obere und untere Schranke für den Wert der Reihe erhält, wobei man weiß, welcher von den betrachteten Werten der bessere Näherungswert ist. Dies Verfahren ist natürlich auch dann anwendbar, wenn $\{a_\nu\}$ nicht vollmonoton ist; es gewährt in diesem Falle der zuerst erwähnten Anordnung der Rechnung gegenüber den Vorteil, daß die Zahlen des Schemas allmählich alle das gleiche Vorzeichen erhalten, falls der Wert der Reihe von 0 verschieden ist. Nur weiß man dann ja nichts über die erzielte Genauigkeit, da ja die Eulersche Transformation darüber keine bindenden Schlüsse gestattet.

Ich füge ohne weitere Erläuterungen ein Beispiel bei; es sei die eihe

$$s = 1 - \frac{0{,}99}{1{,}1} + \frac{0{,}99^2}{1{,}2} - \frac{0{,}99^3}{1{,}3} + \cdots$$

geben. Wir erhalten folgende Anordnung der Rechnung:

	$s_\nu^{(1)}$	$2\,s_\nu^{(2)}$	$4\,s_\nu^{(3)}$	$8\,s_\nu^{(4)}$	$16\,s_\nu^{(5)}$	$32\,s_\nu^{(6)}$
	0,000 000 000	1,000 000 000	2,100 000 000	4,216 750 000	8,437 366 154	16,875 836 931
000	1,000 000 000	1,100 000 000	16 750 000	20 616 154	8 470 777	6 205 139
000	0,100 000 000	1,016 750 000	03 866 154	17 854 623	7 734 362	5 975 007
000	0,916 750 000	87 116 154	13 988 469	9 879 739	8 240 645	6 123 908
846	0,170 366 154	26 872 315	05 891 270	8 360 906	7 883 263	024 628
007	0,856 506 161	79 018 955	12 469 636	9 522 357	8 141 365	92 544
367	0,222 512 794	33 450 681	07 052 721	8 619 008	7 951 179	44 995
093	0,810 937 887	73 602 040	11 566 287	9 332 171	8 093 816	
734	0,262 664 153	37 964 247	07 765 884	8 761 645		
941	0,775 300 094	69 801 637	10 995 761			
551	0,294 501 543	41 194 124				
038	0,746 692 581					

$s_\nu^{(7)}$	$128\,s_\nu^{(8)}$	$256\,s_\nu^{(9)}$	$512\,s_\nu^{(10)}$	$1024\,s_\nu^{(11)}$	$2048\,s_\nu^{(12)}$
042 070	67,504 222 216	135,008 501 277	270,017 027 789	540,034 067 460	1080,068 140 709
180 146	79 061	26 512	39 671	73 249	
098 915	47 451	13 159	3 578		
148 536	65 708	20 419			
17 172	54 711				
37 539					

eraus folgt als zu kleiner Wert $s_0^{(12)} = 0{,}527\,377\,022$ und als zu großer ert $s_1^{(11)} = 0{,}527\,377\,025$, wobei in beiden Werten die letzte Ziffer durch höhung entstanden ist; das arithmetische Mittel aus beiden ist 527 377 02 (35). Der genaue Wert ist bis auf 8 Stellen nach dem Komma ich 0,527 377 02.

Nach dieser praktischen Anwendung mögen noch folgende theoretischen merkungen erwähnt werden. Die Voraussetzung, daß $\{a_\nu\}$ voll-noton ist, bedeutet ein sehr starkes inneres Band zwischen den Zahlen Ist z. B. der Anfang der Folge $\{a_\nu\}$ bekannt, so sind die folgenden emente durch sehr zahlreiche Ungleichheiten bedingt. Daher kommt daß man aus wenigen bekannten Anfangselementen einer vollmono-en Folge für die zugehörige alternierende Reihe enge Schranken auf-llen kann, die sich einfach daraus ergeben, daß die Glieder in den lten der Matrix M^* alternieren. Fängt beispielsweise eine voll-notone Folge mit 1 an, so liegt der Wert der zugehörigen Reihe zwischen und 1; sind die beiden ersten Glieder der Folge 1, $\frac{1}{2}$, so ist der Wert Reihe zwischen 0,625 und 0,75 gelegen. Hat die Folge die drei

Anfangsglieder $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$, so liegt die Summe der alternierenden Reihe zwischen $0{,}\overline{5}\ldots$ und $0{,}7083\ldots$ Und ist schließlich von $\{a_\nu\}$ der Anfang $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$, so liegt der Reihenwert zwischen $0{,}6822916\ldots$ und $0{,}697916\ldots$ So ist also die Reihe für $\ln 2$ bereits durch ihre ersten vier Glieder in enge Schranken eingeschlossen, weil die Beträge ihrer Glieder eine vollmonotone Folge bilden. Und ähnlich liegt es mit jeder derartigen Reihe.

Diese Abschätzung einer solchen Reihe mit Hilfe der höheren arithmetischen Mittel, die aus den ersten Teilsummen gebildet sind, kann benutzt werden, um folgenden Satz[13]) zu beweisen.

Satz. *Ist die Funktionenfolge* $\{f_\nu(x)\}$ *in dem Intervall* $0 < x \leqq a$ *erklärt und daselbst für jedes* x *dieses Intervalls mindestens zweifach monoton, sind ferner die beiden Gleichungen* $\lim_{\nu\to\infty} f_\nu(x) = 0$, $(0 < x \leqq a)$, $\lim_{x\to 0} Df_1(x) = 0$ *erfüllt, so genügt die durch*

$$F(x) = f_1(x) - f_2(x) + f_3(x) - \cdots$$

für $0 < x \leqq a$ *erklärte Funktion* $F(x)$ *den Gleichungen*:

$$\limsup_{x\to 0_+} F(x) = \tfrac{1}{2} \limsup_{x\to 0_+} f_1(x),$$

$$\liminf_{x\to 0_+} F(x) = \tfrac{1}{2} \liminf_{x\to 0_+} f_1(x).$$

Beweis: Die $F(x)$ definierende Reihe ist zunächst konvergent. Die Teilsummen $s_0^{(1)}, s_1^{(1)}, s_2^{(1)}$ haben folgende Werte: $s_0^{(1)} = 0$, $s_1^{(1)} = f_1(x)$, $s_2^{(1)} = f_1(x) - f_2(x) = Df_1(x)$. Da $\{f_\nu(x)\}$ mindestens zweifach monoton ist, so alternieren auch $s_0^{(2)}, s_1^{(2)}, s_2^{(2)}, \ldots$ Nun ist $s_0^{(2)} = \frac{1}{2} f_1(x)$ und $s_1^{(2)} = \frac{1}{2} f(x) + \frac{1}{2} Df_1(x)$, und da nun

$$\tfrac{1}{2} f_1(x) < F(x) < \tfrac{1}{2} f_1(x) + \tfrac{1}{2} Df_1(x)$$

ist, während $\lim_{x\to 0_+} Df_1(x) = 0$ ist, so ergeben sich hieraus sofort die behaupteten Gleichungen.

Zusatz: Unter den Voraussetzungen des Satzes zieht das Vorhandensein des $\lim_{x\to 0_+} f_1(x)$ das des $\lim_{x\to 0_+} F(x)$ nach sich und umgekehrt.

Ist also $\lim_{x\to 0_+} f_1(x)$ vorhanden (woraus $\lim_{x\to 0_+} f_\nu(x) = \lim_{x\to 0_+} f_1(x)$ folgt),

[13]) Man kann natürlich diesen Satz leicht allgemeiner formulieren, indem man das in dem Satz vorkommende Intervall durch eine Punktmenge ersetzt und statt der Zahl 0 irgendeinen Häufungspunkt derselben nimmt, wobei dann natürlich die Voraussetzung über $Df_1(x)$ entsprechend abgeändert werden muß.

nd definiert man $F(0)$ durch $\frac{1}{2}\lim_{x\to 0_+} f_1(x)$, so ist $F(x)$ für $x=0$ bei echtsseitiger Annäherung stetig. Aus diesen Ergebnissen folgt z. B. für

$$F_1(x)=\sum_{\nu=0}^{\infty}{}'\frac{(-1)^\nu}{1+\nu x} \quad \text{und für} \quad F_2(x)=1-\frac{1}{2^x}+\frac{1}{3^x}-\ldots,$$

aß $\lim_{x\to 0_+} F_1(x)=\lim_{x\to 0_+} F_2(x)=0{,}5$ ist. Setzt man übrigens $F_1(0)=\frac{1}{2}$, ann hat $F_1(x)$ für $x=0$ eine Ableitung von rechts, und zwar ist sie, ie man durch Heranziehung von $s_0^{(3)}$ und $s_1^{(3)}$ erkennt, gleich 0,25.

(Eingegangen am 9. Mai 1919.)

Mittelwertbildung und Reihentransformation.

Von

Konrad Knopp in Königsberg i. Pr.

In der vorstehenden gleichbetitelten Arbeit hat Herr Jacobsthal zwei interessante Resultate gefördert. Er hat zunächst zu der von Euler herrührenden klassischen Reihentransformation

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}(-1)^{\nu-1}a_\nu=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\Delta^{k-1}a_1\ ^{1})$$

einen neuen Zugang gefunden und dabei die wenig bekannte Tatsache wieder bewiesen, daß sie bei *jeder* konvergenten Reihe $\sum(-1)^{\nu-1}a_\nu$ — mit reellen oder komplexen Gliedern — erlaubt ist. Sodann hat er die folgende, insbesondere für die numerische Behandlung bestimmter sogleich zu nennender Reihentypen vorteilhafte Entdeckung gemacht: Sind

$$s_n=s_n^{(1)}=a_1-a_2+\ldots+(-1)^{n-1}a_n,\quad(n=1,2,\ldots),$$

die Teilsummen der Reihe $\sum(-1)^{\nu-1}a_\nu$, stellt man diesen noch das Glied $s_0=s_0^{(1)}=0$ voran und setzt nun, unter $p_1, p_2, \ldots$ *irgendwelche* ganze Zahlen $\geqq 2$ verstehend, nacheinander erst

$$s_n^{(2)}=\frac{s_n^{(1)}+s_{n+1}^{(1)}+\ldots+s_{n+p_1-1}^{(1)}}{p_1},\qquad(n=0,1,\ldots),$$

und dann weiter allgemein

$$s_n^{(k+1)}=\frac{s_n^{(k)}+s_{n+1}^{(k)}+\ldots+s_{n+p_k-1}^{(k)}}{p_k},\quad\begin{cases}k=2,3,\ldots,\\ n=0,1,2,\ldots,\end{cases}$$

[1]) Ich setze, wie in der Reihenlehre meist üblich, $\Delta^0 a_\nu=a_\nu$ und für $k\geqq 1$

$$\Delta^k a_\nu=\Delta^{k-1}a_\nu-\Delta^{k-1}a_{\nu+1}=a_\nu-\binom{k}{1}a_{\nu+1}+\binom{k}{2}a_{\nu+2}\ldots+(-1)^k\binom{k}{k}a_{\nu+k}.$$

sind in der Matrix

$$\begin{pmatrix} s_0^{(1)} & s_0^{(2)} & \dots & s_0^{(k)} & \dots \\ s_1^{(1)} & s_1^{(2)} & \dots & s_1^{(k)} & \dots \\ s_2^{(1)} & s_2^{(2)} & \dots & s_2^{(k)} & \dots \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \dots \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \dots \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \dots \end{pmatrix}$$

M)

e aufeinander folgenden Spalten unter bestimmten Voraussetzungen immer esser werdende Approximationsfolgen für die Summe s der Reihe $\sum(-1)^{\nu-1}a_\nu$. Diese Voraussetzungen sind folgende: *Die Zahlen a_ν llen positiv und r-fach bzw. vollmonoton sein.* Dabei nennt Herr acobsthal die Folge $(a_1, a_2, \dots)$ mehrfach monoton, wenn sie selbst nd ihre aufeinander folgenden Differenzenreihen

$$\begin{array}{ccccccc} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_\nu & \dots \\ \Delta a_1 & \Delta a_2 & \Delta a_3 & \dots & \Delta a_\nu & \dots \\ \Delta^2 a_1 & \Delta^2 a_2 & \Delta^2 a_3 & \dots & \Delta^2 a_\nu & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \dots \end{array}$$

ur positive Glieder enthalten; und zwar heißt sie *r-fach monoton*, wenn enau die ersten r Differenzenreihen nur positive Glieder enthalten, und *ollmonoton*, wenn dies bei *allen* Differenzenreihen der Fall ist. Dann utet sein wesentliches Ergebnis genauer:

Ist $(a_1, a_2, \dots)$ eine r-fach (bzw. voll-) monotone Nullfolge, so reben die Glieder der ersten r (bzw. aller) Spalten der Matrix M *alternierend*[2]) *gegen den Grenzwert s.*

Diese beiden Ergebnisse aber sind auf einem Wege hergeleitet, der mir er Einfachheit derselben nicht ganz angemessen erscheint. Im folgenden ill ich zeigen, daß die genannten (und darüber noch etwas hinausehende) Resultate, sich in der leichtesten Weise ergeben, wenn man die ragestellung ein klein wenig verändert[3]).

---

[2]) Die genaue Erklärung dieser Bezeichnung wird weiter unten gegeben.

[3]) Herr Jacobsthal braucht und beweist auf dem von ihm eingeschlagenen ege u. a. noch den Satz, *daß in der Matrix* M *auch die Glieder der ersten Zeile* $\to s$ *streben, und zwar unter der alleinigen Voraussetzung, daß die Glieder der ersten alte* $s_n^{(1)} \to s$ *streben.* Diesen an sich sehr interessanten Satz kann man ganz kurz beweisen: Wie üblich erkennt man zunächst, daß es genügt, den Satz für $s = 0$ beweisen. Versteht man dann unter ε_n den größten der unter den Zahlen $|s_n^{(1)}|$, $|s_{n+1}^{(1)}|$, $|s_{n+2}^{(1)}|, \dots$ vorkommenden Werte und bildet nun, von diesen Zahlen ε_n (an

I. Die Eulersche Transformation.

Ist $\sum_{\nu=1}^{\infty}(-1)^{\nu-1}a_\nu$ *konvergent mit der Summe* s, *so gilt (bei sonst beliebigen komplexen* a_ν*) das gleiche auch von der Reihe*

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\Delta^{k-1}a_1.$$

Beweis. Bezeichnet man die Teilsummen der gegebenen Reihe mit s_n, die der transformierten Reihe mit S_n, so ist zunächst

$$(a)\qquad S_n=\frac{\binom{n}{0}s_0+\binom{n}{1}s_1+\ldots+\binom{n}{n}s_n}{2^n}\ ^{4})$$

In der Tat, schreibt man diese Behauptung ausführlicher in der Form

$$2^{n-1}a_1+2^{n-2}\Delta a_1+\ldots+2^0\Delta^{n-1}a_1=\binom{n}{1}s_1+\binom{n}{2}s_2+\ldots+\binom{n}{n}s_n,$$

so ergibt sich ihre Richtigkeit unmittelbar durch Vergleich der Koeffizienten, mit denen $(-1)^{k-1}a_k$ beiderseits auftritt; denn dieser ist

$$\text{links:}\ \binom{n-1}{k-1}+2\binom{n-2}{k-1}+2^2\binom{n-3}{k-1}+\ldots+2^{n-k}\binom{k-1}{k-1},$$

$$\text{rechts:}\ \binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}+\ldots+\binom{n}{n}.$$

Und daß diese beiden Ausdrücke einander gleich sind, ist eine elementare Tatsache aus der Lehre von den Binomialkoeffizienten.

Daß nun aus $s_n\to s$ nach (a) sofort auch $S_n\to s$ folgt, ergibt sich jetzt in üblicher Weise so: Setzt man $s_\nu=s+\varepsilon_\nu$, so ist

$$(b)\qquad S_n=s+\frac{\binom{n}{1}\varepsilon_0+\binom{n}{1}\varepsilon_1+\ldots+\binom{n}{n}\varepsilon_n}{2^n}$$

Stelle der s_n) ausgehend, eine genau analoge Matrix $\mathfrak{M}'$, doch so, daß dabei die ganzen Zahlen $p_1, p_2, \ldots$ *sämtlich* gleich 2 genommen werden, so sieht man sofort, daß für alle Indexpaare $|s_n^{(k)}|\leqq\varepsilon_n^{(k)}$, speziell also $|s_0^{(k)}|\leqq\varepsilon_0^{(k)}$ ist. Es genügt jetzt also, die Beziehung $\varepsilon_0^{(k)}\to 0$ zu beweisen. Da aber, wie man sofort nachrechnet,

$$\varepsilon_0^{(k)}=\frac{\binom{k}{0}\varepsilon_0+\binom{k}{1}\varepsilon_1+\ldots+\binom{k}{k}\varepsilon_k}{2^k}$$

ist, so folgt dies wörtlich ebenso wie weiter unten im Text das entsprechende bei der Gleichung I, (b).

[4]) Die Entdeckung dieses einfachen Zusammenhanges zwischen den Teilsummen der gegebenen Reihe und denen der transformierten scheint mir das wichtigste an den §§ 1 und 2 der Jacobsthalschen Arbeit. Er gelangt aber zu ihr auf einem sehr weiten Umwege und benützt sie auch nicht zum Beweis für die Gültigkeit der Transformation.

nd es genügt zu zeigen, daß der letzte Quotient $\to 0$ strebt. Ist aber > 0 gegeben, so kann man m so groß wählen, daß für $\nu > m$ stets $\varepsilon_\nu| < \frac{\varepsilon}{2}$ ist; dann ist für $n > m$

$$|S_n - s| < \frac{\varepsilon}{2} + \left| \frac{\binom{n}{0}\varepsilon_0 + \binom{n}{1}\varepsilon_1 + \ldots + \binom{n}{m}\varepsilon_m}{2^n} \right|.$$

Da nun weiter für jedes feste $\nu = 0, 1, \ldots, m$ ersichtlich $\frac{1}{2^n}\binom{n}{\nu}\varepsilon_\nu \to 0$ strebt, so kann man jetzt $n_0 > m$ so wählen, daß für $n > n_0$

$$|S_n - s| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

t. Damit ist schon alles bewiesen.

II. Die Mittelbildungen.

Noch wesentlich leichter ergibt sich das zweite der eingehend genannten Resultate. Zur bequemen Formulierung sage ich, ähnlich wie Herr Jacobsthal, von einer gegen x konvergierenden Folge $(x_0, x_1, \ldots)$, daß sie sich *alternierend* ihrem Grenzwert nähert, wenn die Fehler $(x - x_n)$ abwechselnde Vorzeichen haben.

Dann gelten die folgenden drei Sätze:

Satz 1. *Es sei $(a_1, a_2, \ldots)$ eine r-fach monotone Nullfolge $(r \geqq 1)$ und also $\sum(-1)^{\nu-1}a_\nu$ eine konvergente Reihe, in der sich die Teilsummen*

$$s_0 = 0, \quad s_n = a_1 - a_2 + \ldots + (-1)^{n-1}a_n, \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

dem Grenzwert s, der Summe der Reihe, alternierend nähern. Dann bilden die absoluten Beträge der Fehler, also die Zahlen

$$t_n = (-1)^n(s - s_n), \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

eine $(r-1)$-fach monotone Folge[5]) *und in der $(r-1)$-ten Differenzenreihe bilden noch die geradstelligen und ungeradstelligen Glieder für sich eine (einfach) monotone Folge.*

Beweis. Es ist

$$t_n = a_{n+1} - a_{n+2} + a_{n+3} - + \ldots,$$

so

$$\Delta^\lambda t_n = \Delta^\lambda a_{n+1} - \Delta^\lambda a_{n+2} + \ldots;$$

[5]) Unter einer 0-fach monotonen Zahlenfolge hat man hier konsequenterweise r zu verstehen, daß die Folge *positive* Glieder hat.

und da für $\lambda = 0, 1, \ldots, r-1$ die Folge $(\Delta^\lambda a_1, \Delta^\lambda a_2, \ldots)$ monoton ist, so ist für diese λ sicher $\Delta^\lambda t_n > 0$. Da ferner hiernach

$$\Delta^\lambda t_n - \Delta^\lambda t_{n+2} = \Delta^\lambda a_{n+1} - \Delta^\lambda a_{n+2}$$

auch noch für $\lambda = r-1$ etwas positives liefert, so ist auch der zweite Teil des Satzes schon bewiesen.

Satz 2. *Es nähere sich die Folge $(x_0, x_1, \ldots)$ alternierend ihrem Grenzwerte x und so, daß die absoluten Beträge der Fehler*

$$y_n = (-1)^n (x - x_n)$$

eine q-fach monotone Folge bilden; und es sei p eine ganze Zahl $\geqq 2$. Dann konvergieren auch die arithmetischen Mittel

$$x'_n = \frac{x_n + x_{n+1} + \ldots + x_{n+p-1}}{p}, \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

alternierend gegen x und zwar so, daß jetzt die absoluten Beträge der Fehler

$$y'_n = (-1)^n (x - x'_n)$$

eine $(q-1)$-fach monotone Folge bilden.

Beweis. Es ist

$$y'_n = \frac{y_n - y_{n+1} + y_{n+2} + \ldots + (-1)^{p-1} y_{n+p-1}}{p}$$

und also

$$p \Delta^\lambda y'_n = \Delta^\lambda y_n - \Delta^\lambda y_{n+1} + \ldots + (-1)^{p-1} \Delta^\lambda y_{n+p-1}.$$

Da nun für $\lambda = 0, 1, \ldots, q-1$ die Folge $(\Delta^\lambda y_0, \Delta^\lambda y_1, \ldots)$ monoton ist, so steht für diese Werte von λ rechterhand etwas positives, — w. z. b. w.[6]).

Satz 3. *Ist unter den Voraussetzungen des vorigen Satzes die q^{te} Differenzenreihe der y_n so beschaffen, daß in ihr noch die geradstelligen und die ungeradstelligen Glieder für sich eine monotone Folge bilden, so gilt das gleiche von der $(q-1)$-ten Differenzenreihe der y'_n.*

Beweis. Nach dem vorigen Beweis ist für $\lambda = q-1$

$$p(\Delta^\lambda y'_n - \Delta^\lambda y'_{n+2}) = (\Delta^\lambda y_n - \Delta^\lambda y_{n+1}) + (-1)^{p-1}(\Delta^\lambda y_{n+p} - \Delta^\lambda y_{n+p+1})$$
$$= \Delta^q y_n + (-1)^{p-1} \Delta^q y_{n+p},$$

und hier stehen nun für ungerades p zwei positive Summanden und für gerades p eine nach Voraussetzung noch positive Differenz, also in jedem Falle etwas positives, — w. z. b. w.

---

[6]) Da hiernach evidenterweise stets $y'_n < \frac{y_n}{p}$ ist, so liefert die Folge x'_n bei gleichem Index jedesmal eine mindestens p-mal so gute Approximation für x als die Folge x_n.

In diesen einfachen und durchsichtigen Sätzen ist aber das zweite r einleitend genannten Ergebnisse vollauf enthalten. Denn ist $(a_1, a_2, \ldots)$ ne r-fach monotone Nullfolge, so bestimmt zunächst Satz 1 das Ver- lten der Folge $(s_0, s_1, \ldots)$. Wendet man auf diese Folge dann die tze 2 und 3 für $q = r - 1$ und $p = p_1$ an, so ergibt sich ebenso das rhalten der Folge $(s_0^{(2)}, s_1^{(2)}, \ldots)$; und indem man dieselben Sätze für $= r - 2$ und $p = p_2$ auf diese neue Folge anwendet, ergibt sich ebenso s Verhalten der Folge $(s_0^{(3)}, s_1^{(3)}, \ldots)$, usw. So ergibt sich der Reihe ch, daß die in den ersten r Spalten der Matrix (M) stehenden Folgen der Tat sämtlich alternierend gegen ihren Grenzwert s streben [und ar genauer so, daß die absoluten Fehler $(-1)^n (s - s_n^{(k)})$ bei festem $= 1, 2, \ldots, r$ eine $(r - k)$-fach monotone Folge bilden], daß jede eser Folgen eine bessere Approximationsfolge für s bildet als die vor- sgehende[7]) und daß in der letzten von ihnen noch die geradstelligen d die ungeradstelligen Glieder für sich eine monotone Folge bilden. ; aber $(a_1, a_2, \ldots)$ *vollmonoton*, so streben *alle* in den Spalten von]) stehenden Folgen alternierend gegen s [und zwar so, daß die abso- en Fehler $(-1)^n (s - s_n^{(k)})$ für *jedes* k eine *vollmonotone* Folge bil- n] und *jede* dieser Folgen liefert bessere Approximationen[7]) für s als e vorausgehende.

Berlin-Lichterfelde, den 3. Juni 1919.

---

[7]) Und zwar ist $|s - s_n^{(k)}| < \dfrac{|s - s_n^{(1)}|}{p_1 p_2 \cdots p_{k-1}}$, die Approximation also mindestens $^{-1}$-mal so gut.

(Eingegangen am 3. Juni 1919.)

Die Stabilität der Staudeschen Kreiselbewegungen.

Von

R. Grammel in Halle.

Einleitung.

Unter den Bewegungen, die ein unsymmetrischer, lediglich der Schwerkraft unterworfener Kreisel von ganz beliebiger Massenverteilung um einen festen Stützpunkt zu vollziehen vermag, sind die von O. Staude[1]) entdeckten die einfachsten und zugleich die einzigen von den bis jetzt bekannten, die der Anschauung unmittelbar zugänglich erscheinen. Sie bestehen nämlich in der gleichförmigen Drehung des Körpers mit bestimmter Winkelgeschwindigkeit um eine in ihm feste, lotrecht gestellte Achse, und zwar liegen die erlaubten Drehachsen alle auf einem ebenfalls im Körper festen Kegel zweiter Ordnung. Über die Stabilität der Staudeschen Drehungen ist bisher, abgesehen von den trivialen Fällen, nichts Sicheres ermittelt worden. Ein Versuch, den J. Hadamard[2]) in dieser Richtung unternahm, führte nicht zum Ziele und hat nur gezeigt, daß die Aufstellung der expliziten Stabilitätsbedingungen bei vorgeschriebener Massenverteilung eine Aufgabe von fast hoffnungsloser Schwierigkeit ist. Im folgenden greife ich diese Aufgabe von einer neuen Seite an, indem ich die Problemstellung sozusagen umkehre, und gelange zu einer vollständigen und sogar verhältnismäßig einfachen Lösung, lediglich mit der Einschränkung, daß die theoretische Stabilität derjenigen Achsen, die sich auf der Grenze zwischen den stabilen und den labilen Bereichen befinden, noch unentschieden bleibt. Es liegt das in der Methode der kleinen Schwingungen begründet, die ich verwende; sie erlaubt zwar, die Grenzen

[1]) O. Staude, Über permanente Rotationsachsen bei der Bewegung eines schweren Körpers um einen festen Punkt, Journ. f. reine u. angew. Math. **113** (1894), S. 318–334.

[2]) J. Hadamard, Sur la stabilité des rotations dans le mouvement d'un corps pesant autour d'un point fixe, Assoc. Française Bordeaux **24** (1895), 2. partie, S. 1–6. Vgl. auch E. J. Routh, Dynamik II, § 214.

er Stabilitätsbereiche aufzufinden, jedoch über die Grenzen selbst vermag e, wie schon vom symmetrischen Kreisel her bekannt ist, keine zuverssige Aussage zu machen[3]). Im Grunde genommen ist dies freilich benglos. Denn eine theoretische Stabilität auf der Grenze ist praktisch lemal eine schlechte Stabilität und zudem insoweit nur noch eine bengte, als die geringste Störung doch zu einer Überschreitung der Grenze ach dem labilen Bereiche führen kann.

Zu den Staudeschen Bewegungen gehören insbesondere die permanenten Drehungen um eine lotrechte Hauptträgheitsachse, die zugleich en Schwerpunkt trägt. Merkwürdigerweise ist auch die schon von agrange[4]) angeschnittene Frage nach der Stabilität dieser Drehungen sher noch nicht erschöpfend untersucht worden[5]). Ich erledige sie im lgenden ebenfalls, wobei sich eine neue dynamische Einteilung der unmmetrischen Kreisel ergibt, die auch für die Theorie seiner allgemeinen ewegungen von Bedeutung sein kann. Es stellt sich heraus, daß die abilität teils an eine untere, teils aber auch an eine obere Grenze für e Drehgeschwindigkeit geknüpft und bei einer gewissen Sorte von Kreiseln erhaupt ausgeschlossen ist.

Endlich untersuche ich noch das Deviationsmoment des unsymmeischen Kreisels bei einer erzwungenen regulären Präzession. Dieses oment steht in einem unmittelbaren Zusammenhang mit den Staudehen Bewegungen.

§ 1.

Unsymmetrische Drehachsen.

1. Wir legen vom raumfesten Stützpunkte des Kreisels aus in die ei zugehörigen Hauptträgheitsachsen ein im Körper festes kartesisches oordinatensystem und bezeichnen die drei Hauptträgheitsmomente um ese Achsen, je geteilt durch das Kreiselgewicht, mit den drei Trägheitshlen α, β, γ, ferner die Koordinaten des Schwerpunkts in diesem System it ξ, η, ζ, die Koordinaten einer raumfesten Marke im Abstand 1 über m Stützpunkt mit x_0, y_0, z_0, und schließlich die Komponenten der

[3]) Vgl. zur Kritik dieser Methode: F. Klein u. A. Sommerfeld, Über die eorie des Kreisels, S. 364—374.

[4]) J. L. Lagrange, Mécanique analytique, 4. Aufl., II, Art. 38—40; vgl. auch Winkelmann, Zur Theorie des Maxwellschen Kreisels, Diss. Göttingen 1904, 69—76.

[5]) Ansätze dazu finden sich bei E. J. Routh, a. a. O. § 212 sowie bei E. Budde, er die sehr schnelle Rotation eines schweren starren Körpers, Berlin Phys. Ges. tt. 9 (1890), S. 15—16.

Winkelgeschwindigkeit ω um die lotrecht gestellte, permanente Drehachse mit

$$p_0 = \omega x_0, \qquad q_0 = \omega y_0, \qquad r_0 = \omega z_0. \tag{1}$$

Die Staudeschen Bewegungen sind als permanente Drehungen dadurch gekennzeichnet, daß dauernd die zeitlichen Ableitungen $\dot{p}_0$, $\dot{q}_0$, $\dot{r}$ verschwinden. Ihre Eulerschen Gleichungen lauten also einfach

$$\begin{cases} (\beta - \gamma)\,\omega^2 y_0 z_0 = \eta z_0 - \zeta y_0, \\ (\gamma - \alpha)\,\omega^2 z_0 x_0 = \zeta x_0 - \xi z_0, \\ (\alpha - \beta)\,\omega^2 x_0 y_0 = \xi y_0 - \eta x_0; \end{cases} \tag{2}$$

und dies sind bereits die Bedingungen, die zwischen ω und den Richtungsgrößen x_0, y_0, z_0 der Drehachse gegen das Koordinatensystem gelten. Weil übrigens ω nur im Quadrat vorkommt, so ist alles folgende vom Umlaufssinne des Kreisels unabhängig.

Wir schließen von vornherein und weiterhin die beiden uneigentlichen Fälle $\omega = 0$ und $\omega = \infty$ aus. Der erste bedeutet nach (2) die statische Ruhelage des Kreisels, wobei der Schwerpunkt entweder senkrecht unter oder senkrecht über dem Stützpunkte liegt. Die Stabilität bzw. Labilität dieser beiden Stellungen ist erwiesen. Der zweite Fall bedeutet, da nun von den drei Koordinaten x_0, y_0, z_0 nach (2) zwei verschwinden müssen, eine unendlich rasche Drehung um eine Hauptträgheitsachse bei beliebiger Lage des Schwerpunktes, eine Bewegung also, die nur im Falle der mittleren Hauptachse labil ist, wie man vom kräftefreien Kreisel her weiß.

Um Aufschluß zu gewinnen über die Stabilität der permanenten Drehungen (2), denken wir uns durch einen kleinen Stoß, der die Richtung und die Größe des Drehvektors ω etwas verändert, die Koordinaten x_0, y_0, z_0, p_0, q_0, r_0 der Bewegung um die kleinen Beträge x, y, z, p, q, r so abgeändert, daß sie jetzt die Werte

$$\bar{x} = x_0 + x, \qquad \bar{p} = p_0 + p \tag{3}$$

und zyklisch weiter annehmen. Wir sehen die Staudeschen Drehungen als stabil an, solange dann x, y, z, p, q, r dauernd kleine Größen bleiben.

Nach der Störung gelten je drei kinematische und drei dynamische Gleichungen, nämlich

$$\dot{\bar{x}} = \bar{y}\bar{r} - \bar{z}\bar{q},$$

$$\alpha\dot{\bar{p}} - (\beta - \gamma)\bar{q}\bar{r} = \bar{y}\zeta - \bar{z}\eta$$

und zyklisch weiter, oder, indem man aus (3) einsetzt, auf (2) achtet, die Größen x, y, z, p, q, r in üblicher Weise als klein behandelt und zuletzt die neuen Veränderlichen

$$X = \omega x - p, \qquad Y = \omega y - q, \qquad Z = \omega z - r$$

enutzt,

4) $$\dot{X} + \dot{p} = \omega(z_0 Y - y_0 Z),$$

5) $$\alpha\omega\dot{p} = [(\beta - \gamma)\omega^2 z_0 + \zeta]q + [(\beta - \gamma)\omega^2 y_0 - \eta]r + \zeta Y - \eta Z$$

nd zyklisch weiter.

Unter den sechs Bewegungsgleichungen (4) und (5) sind nur fünf oneinander unabhängig. Denn zufolge der Identitäten

$$x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = 1, \qquad \bar{x}^2 + \bar{y}^2 + \bar{z}^2 = 1$$

esteht die Beziehung

6) $$x_0(X + p) + y_0(Y + q) + z_0(Z + r) = 0,$$

ermöge welcher jede der drei Gleichungen (4) aus den beiden andern olgt. Es bleiben also fünf lineare gekoppelte Differentialgleichungen mit onstanten Koeffizienten für die Bewegungskoordinaten X, Y, Z, p, q, r, eren partikuläre Integrale von der Form $e^{\varrho t}$ sind. Zur Bestimmung der ennziffer ϱ erscheint eine Frequenzgleichung fünften Grades, die mindestens eine reelle Wurzel ϱ_0 besitzt. Behandelt man die sechs Gleichungen (4) und (5) als unabhängig, so wird die Frequenzgleichung vom echsten Grade und zwar, wie wir alsbald finden werden, kubisch in ϱ^2 nd mit der Doppelwurzel $\varrho^2 = 0$ (beides könnte natürlich von vornherein us der Existenz einer Kräftefunktion und aus der Form der zugehörigen agrangeschen Funktion der Bewegung leicht erschlossen werden[6]). Infolgedessen ist jene reelle Kennziffer $\varrho_0 = 0$, und die Staudesche Bewegung ist mithin dann und nur dann als stabil anzusehen, wenn die unmehr in ϱ^2 quadratische Frequenzgleichung lauter verschiedene reelle egative Wurzeln besitzt.

2. Um die hierfür notwendigen und hinreichenden Bedingungen xplizit zu ermitteln, entfernt man am zweckmäßigsten aus den sechs leichungen (4) und (5) die Koordinaten p, q, r. Man erhält so rasch n System von drei linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung ir X, Y, Z, zu welchen die Frequenzgleichung gehört

$$\Delta(\varrho) \equiv \begin{vmatrix} \alpha\varrho^2 + u & -n\varrho + \nu & m\varrho + \mu \\ n\varrho + \nu & \beta\varrho^2 + v & -l\varrho + \lambda \\ -m\varrho + \mu & l\varrho + \lambda & \gamma\varrho^2 + w \end{vmatrix} = 0$$

[6]) Vgl. E. J. Routh, a. a. O. § 114.

mit den Abkürzungen

$$(7)\qquad \begin{cases} u = (\beta-\gamma)(y_0^2 - z_0^2)\,\omega^2 - \eta\, y_0 - \zeta\, z_0, \\ l = (\beta+\gamma-\alpha)\,\omega\, x_0, \\ \lambda = [\zeta - (\gamma-\alpha)\,\omega^2 z_0]\, y_0 = [\eta + (\alpha-\beta)\,\omega^2 y_0]\, z_0 \end{cases}$$

und zyklisch weiter.

Die Identität der beiden rechten Seiten von λ (desgl. von μ und ν) folgt aus (2), und ebenso ergibt sich

$$(8)\qquad u x_0 + \nu y_0 + \mu z_0 = 0$$

und zyklisch weiter.

Nach bekannten Determinantensätzen verschwindet, wie angekündigt, zufolge der Beziehungen (8) das von ϱ freie Glied

$$\begin{vmatrix} u & \nu & \mu \\ \nu & v & \lambda \\ \mu & \lambda & w \end{vmatrix}$$

der Determinante Δ, welche übrigens in der Tat unempfindlich gegen die Vertauschung von ϱ gegen $-\varrho$ ist; und somit erscheint die Frequenzgleichung in der Form

$$(9)\qquad g_0 \varrho^4 + g_1 \varrho^2 + g_2 = 0$$

mit den Koeffizienten

$$(10)\qquad \begin{cases} g_0 = \alpha\beta\gamma, \\ g_1 = \mathfrak{S}(\beta\gamma u + \alpha l^2), \\ g_2 = \mathfrak{S}[\alpha(vw - \lambda^2) + u l^2 + 2\lambda m n], \end{cases}$$

wo das Symbol $\mathfrak{S}$ eine Summe über drei durch zyklische Vertauschung auseinander hervorgehende Ausdrücke bedeutet.

Weil g_0 wesentlich positiv ist, so lauten mithin die gesuchten Bedingungen für die Stabilität der Staudeschen Drehungen

$$(11)\qquad g_1 > 0, \quad g_2 > 0, \qquad k \equiv g_1^2 - 4\, g_0 g_2 > 0.$$

Über die Grenzen $g_2 = 0$ oder $k = 0$ enthalten wir uns im folgenden jeder Aussage.

Sieht man die Massenverteilung des Kreisels, d. h. die sechs Zahlen $\alpha, \beta, \gamma, \xi, \eta, \zeta$ für die Trägheit und Schwerpunktslage als gegeben an, so erfüllen die Richtungsgrößen der zulässigen (stabilen und instabilen) permanenten Drehachsen nach (2) die Gleichung

$$(12)\qquad h \equiv (\beta-\gamma)\, y_0 z_0 \xi + (\gamma-\alpha)\, z_0 x_0 \eta + (\alpha-\beta)\, x_0 y_0 \zeta = 0.$$

Deutet man x_0, y_0, z_0 unter Verzicht auf die Bedingung $x_0^2 + y_0^2 + z_0 =$

s laufende Koordinaten, so sagt die Gleichung (12) aus, daß die zu-
ssigen Drehachsen auf einem im Kreisel festen Nullpunktskegel zweiter
rdnung liegen. Denkt man sich andererseits in die Ausdrücke u, l, λ usw.
) den Wert von ω^2 aus (2) eingeführt, so stellen die Gleichungen

3) $$g_1 = 0, \qquad g_2 = 0, \qquad k = 0$$

enso je einen Nullpunktskegel von der vierten und zwei von der achten
rdnung dar. Der Bereich der stabilen Drehachsen besteht dann aus
wissen Bezirken, welche die Kegel (13) aus dem Kegel (12) aus-
hneiden. Es ist wenig Aussicht vorhanden, das Stabilitätsproblem durch
e geometrische Untersuchung der Schnittverhältnisse der vier Kegel in
ersichtlicher Form zu lösen.

Wir kehren nun die bisherige Fragestellung um, sehen also *nicht*
hr die *Massenverteilung* als *gegeben*, die *Richtungsgrößen* x_0, y_0, z_0
r stabilen permanenten Drehachsen als *gesucht* an, sondern *wir gehen*
n einer bestimmten Stellung x_0, y_0, z_0 *der Drehachse im Körper aus*
d fragen bei gegebenen Trägheitszahlen α, β, γ *nach denjenigen Schwer-*
nktslagen ξ, η, ζ, die zu permanenten und stabilen Drehungen um die
hse mit der Richtung x_0, y_0, z_0 Veranlassung geben.

3. Für die weitere Untersuchung setzen wir zunächst voraus, daß
Trägheitszahlen α, β, γ unter sich, die Richtungsgrößen x_0, y_0, z_0 der
ehachse aber wenigstens von Null verschieden seien. Die Drehachse
gt dann in keiner der drei Hauptebenen des Kreisels und soll also eine
symmetrische heißen. Wir beschränken uns keineswegs, wenn wir unsere
raussetzungen dahin formulieren, daß

4) $$\alpha > \beta > \gamma,$$

5) $$x_0 > 0, \qquad y_0 > 0, \qquad z_0 > 0$$

n soll.

Die Umkehrung unserer Fragestellung bedeutet, daß wir x_0, y_0, z_0
tan als feste Werte, ξ, η, ζ jedoch als laufende Koordinaten behandeln.
d folglich stellt jetzt (12) einfach eine Nullpunktsebene dar als geo-
trischen Ort aller zu einer vorgeschriebenen permanenten Drehachse
örigen Schwerpunktslagen. Wir wollen sie die *Schwerpunktsebene* heißen.
enthält insbesondere die Punkte (x_0, y_0, z_0) und $(-x_0, -y_0, -z_0)$,
lche ja auf der Drehachse liegen. *Die Schwerpunktsebene steht also*
echt im Raume. Senkrecht unter bzw. über dem Stützpunkt (Null-
nkt) befinden sich alle Schwerpunktslagen des stabilen bzw. labilen
ichgewichts des ruhenden Kreisels.

Aber durchaus nicht jeder Pnnkt der Schwerpunktsebene (12) ist ein
ässiger Schwerpunkt für eine (stabile oder labile) permanente Drehung.

Weil nämlich ω^2 eine wesentlich positive Größe ist, so müssen gemäß unseren Voraussetzungen (14) und (15) zufolge (2) auch die drei Ausdrücke

$$f_1 \equiv \eta z_0 - \zeta y_0, \quad f_2 \equiv \xi z_0 - \zeta x_0, \quad f_3 \equiv \xi y_0 - \eta x_0$$

positiv bleiben. Die drei Ebenen $f_1 = 0$, $f_2 = 0$ und $f_3 = 0$ aber schneiden einander und die Schwerpunktsebene nach der Geraden

$$\xi : \eta : \zeta = x_0 : y_0 : z_0,$$

also nach der Drehachse. Diese Achse teilt demnach den Bereich der zulässigen von dem der unzulässigen Schwerpunkte ab. Die Koordinaten des offensichtlich in der Schwerpunktsebene liegenden Punktes $(\alpha x_0, \beta y_0, \gamma z_0)$ machen die Ausdrücke f_1, f_2, f_3 positiv, und somit gilt:

Von den beiden Halbebenen, in welche die Schwerpunktsebene durch die Drehachse geteilt wird, enthält diejenige die zulässigen Schwerpunkte, welche auch den Punkt $(\alpha x_0, \beta y_0, \gamma z_0)$ *trägt.*

Die zulässige Halbebene besteht nun wieder aus stabilen und aus labilen Bereichen, d. h. aus Teilen, deren Punkte, zu Schwerpunkten des Kreisels gewählt, die Drehachse stabil bzw. labil werden lassen. Um diese Teile aufzufinden, müssen wir die Stabilitätsbedingungen (11) explizit anschreiben. Wir finden auf Grund von (10), (7) und (2) nach einigen Zwischenrechnungen zur Elimination von ω^2

$$g_1 \equiv a_1 \xi + b_1 \eta + c_1 \zeta, \tag{16}$$

$$g_2 \equiv a_2 \eta \xi + b_2 \zeta \xi + c_2 \xi \eta \tag{17}$$

mit den Koeffizienten

$$\begin{cases} a_1 = \frac{\beta y_0^2}{(\alpha-\gamma)x_0}[(\beta-\gamma)^2 + \alpha(3\gamma - 2\beta)] + \frac{\gamma z_0^2}{(\alpha-\beta)x_0}[(\beta-\gamma)^2 + \alpha(3\beta - \\ a_2 = \frac{x_0^2}{y_0 z_0}[\alpha + 3y_0^2(\alpha-\beta) + 3z_0^2(\alpha-\gamma)] \end{cases} \tag{18}$$

und zyklisch weiter. Wir merken noch an, daß zufolge (14) und (15

$$a_2 > 0, \quad \frac{z_0 x_0}{y_0^2} b_2 - \frac{x_0 y_0}{z_0^2} c_2 = 4(\beta - \gamma) > 0 \tag{19}$$

ist.

Geometrisch gedeutet, stellt $g_1 = 0$ ebenfalls eine Nullpunktsebene vor. Sie schneidet die Schwerpunktsebene nach einer Geraden G_1. Die Punkte der Schwerpunktsebene auf der einen Seite dieser Geraden machen den Ausdruck g_1 positiv, die auf der anderen negativ. Weil

$$g_1(x_0, y_0, z_0) \equiv -\mathfrak{S}\alpha(\beta+\gamma)x_0 < 0$$

wird, so schließen wir:

Die Gerade G_1 schneidet aus der zulässigen Schwerpunktshalbebene in der Umgebung des Punktes (x_0, y_0, z_0) einen labilen Bereich aus.

Ferner bedeutet $g_2 = 0$ einen Nullpunktskegel zweiter Ordnung, der die drei Koordinatenachsen zu Erzeugenden hat. Wir können unzweideutig von einem Außenraum und von einem Innenraum dieses Kegels sprechen, indem wir unter jenem die konvexe, unter diesem die konkave Seite verstehen. Bezeichnen wir in leichtverständlicher Weise die Oktanten des Koordinatenraumes durch die Vorzeichen der Koordinaten daselbst, so erlauben die Bedingungen (19) drei Fälle, die wir sogleich tabellarisch zusammenstellen

	a_2	b_2	c_2	Oktanten des Innenraumes	g_2 im Innenraum
1.	+	+	+	(+++) (−−−)	+
2.	+	+	−	(++−) (−−+)	−
3.	+	−	−	(+−−) (−++)	+

Die stabilen Bereiche sind beim ersten und dritten Falle im Innenraume, beim zweiten im Außenraume des Kegels zu suchen.

Das Gebilde

$$k \equiv g_1^2 - 4\, g_0 g_2 = 0 \tag{20}$$

endlich stellt ebenfalls einen Nullpunktskegel zweiter Ordnung vor, welcher den Kegel $g_2 = 0$ längs dessen (reellen oder imaginären) Schnittgeraden mit der Ebene $g_1 = 0$ berührt. Weil nach (20) k nur da verschwinden kann, wo $g_2 \geqq$ bleibt, so liegt der Kegel $k = 0$ im Innenraum des Kegels $g_2 = 0$, wenn dort g_2 positiv, im Außenraum, wenn hier g_2 positiv ist. Schreitet man von der Berührungsstelle beider Kegel längs der Ebene $g_1 = 0$ fort, so wird $k \equiv -4\, g_0 g_2$, also von entgegengesetztem Vorzeichen wie g_2. Und daraus schließt man leicht, daß im *Zwischenraume* zwischen beiden Kegeln $g_2 > 0$ und $k > 0$ wird.

Die Stabilitätsbereiche liegen also im Zwischenraume. Dieser besteht im Falle einer reellen Berührung beider Kegel aus vier schaufelförmigen Körpern (wovon zwei in eine Gerade zusammenschrumpfen, wenn die beiden Berührungsgeraden zusammenrücken), im Falle einer imaginären Berührung aus zwei einfachen

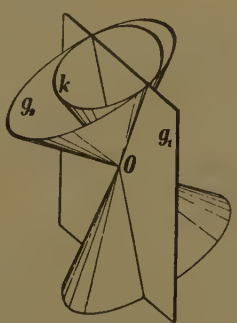


Fig. 1.

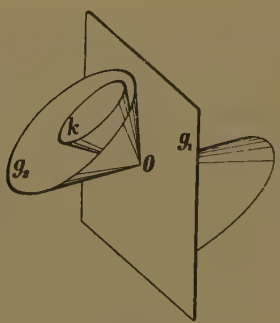


Fig. 2.

Hohlkegeln. Die Figuren 1 und 2, die dies schematisch zeigen, gelten für die Fälle 1. und 3., und es wären für den Fall 2. die Buchstaben g_2 und k zu vertauschen. Nennen wir positive Seite der Ebene $g_1 = 0$ denjenigen Raum, in welchem g_1 positiv ist, so mögen wir die bisherigen Erkenntnisse dahin zusammenfassen:

Stabil sind die und nur die Bereiche der zulässigen Schwerpunktshalbebene, welche aus dieser ausgeschnitten werden durch diejenigen Teile des Zwischenraumes der beiden Kegel $g_2 = 0$ und $k = 0$, die auf der positiven Seite der Ebene $g_1 = 0$ liegen. Es gibt mindestens einen und höchstens zwei stabile Bereiche, und zwar zwei, wenn die Schwerpunktsebene beide Kegel schneidet, also insbesondere, wenn die Schnittgerade G_1 der Ebene $g_1 = 0$ und der Schwerpunktsebene im Innenraume der beiden Kegel liegt.

Je nachdem die Berührung der beiden Kegel reell (I) oder imaginär (II) ist, je nachdem ferner die Funktion g_2 im Innenraume (A) oder im Außenraume (B) des Kegels $g_2 = 0$ positiv ist, je nachdem endlich im Falle I die Gerade G_1 innerhalb (a) oder außerhalb (b) der Kegel gelegen ist, hat der Stabilitätsbereich die eine oder die andere der in Figur 3 dargestellten Gestalten, die dort durch die *wagerechte* Schraffur hervorgehoben sind. Die Schnittgeraden der einzelnen Gebilde mit der als Zeichenebene gewählten Schwerpunktsebene sind durch die entsprechenden großen Buchstaben bezeichnet; die *schrägen* Schraffuren sind für die Ausschaltung der unzulässigen Halbebene und des Bereiches $g_1 < 0$ verwendet; es stellen ferner P und P' die Punkte (x_0, y_0, z_0) und $(-x_0, -y_0, -z_0)$ vor, und die Klammern deuten an, daß die beiden verbundenen Bereiche auch zusammenfallen können. Der expliziten Berechnung der Bereiche steht keinerlei Hindernis im Wege; wir verzichten darauf, die höchst einfachen Formeln dafür anzuschreiben.

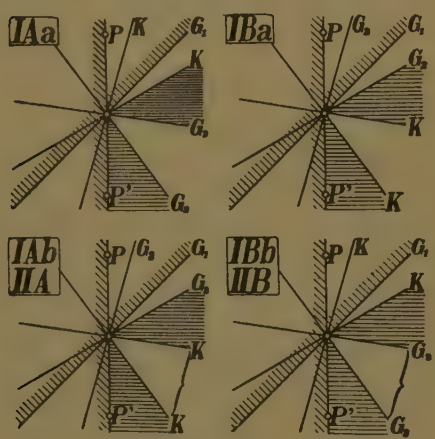


Fig. 3.

4. Man steigt leicht von dem allgemeinen Falle (14), (15) zu den Sonderfällen herab. Eine Drehachse möge *halbsymmetrisch* heißen, wenn sie in einer der drei Hauptebenen, aber nicht in einer der Hauptträgheitsachsen liegt. Wir dürfen dann ohne Einschränkung statt (14), (15)

$$\alpha \neq \beta \neq \gamma \neq \alpha$$

$$x_0 > 0, \quad y_0 > 0, \quad z_0 = 0$$

voraussetzen. Die Schwerpunktsebene deckt sich jetzt mit der xy-Ebene, und es genügt, ihre Schnittlinien mit den Gebilden $g_1 = 0$, $g_2 = 0$ und $k = 0$ aufzusuchen. Man findet dafür die Gleichungen

21) $$G_1 \equiv a_1 \xi - b_1 \eta = 0,$$

22) $$G_2 \equiv (a_2 \xi - b_2 \eta)(a_3 \xi + b_3 \eta) = 0,$$

23) $$K \equiv G_1^2 - 4(\alpha - \beta) g_0 G_2 = 0$$

mit den Koeffizienten

) $$\begin{cases} a_1 = y_0 \{\alpha x_0^2 [(\alpha - \beta)^2 + \gamma(3\beta - 2\alpha)] + \beta y_0^2 [2\alpha\gamma - \beta(\gamma + \alpha - \beta)]\}, \\ a_2 = y_0 (\beta - \gamma), \qquad a_3 = y_0^3 [3 x_0^2 (\alpha - \beta) - \beta], \end{cases}$$

woraus die b durch Vertauschung von x_0 und y_0 und von α und β hervorgehen.

Diese Ausdrücke bestimmen jetzt die Stabilitätsbereiche an Stelle von (16) bis (18), und sie geben die Verhältnisse auch dann noch wieder, wenn das Trägheitsellipsoid rotationssymmetrisch geworden ist, ausgenommen die Fälle, daß die Drehachse in der Äquatorebene liegt oder in der Symmetrieachse. Diese beiden Fälle sind dem folgenden Abschnitt zuzuzählen.

§ 2.

Symmetrische Drehachsen.

1. Es bleibt nun lediglich noch die Drehung um eine Hauptträgheitsachse zu erledigen. Wir sprechen dann von einer *symmetrischen* Drehachse und wollen dazu die z-Achse wählen, die also lotrecht gestellt sein muß. Setzen wir demgemäß $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, $z_0 = 1$, so verlangen die Gleichungen (2), daß auch $\xi = 0$ und $\eta = 0$ werde, wogegen ζ beliebig bleibt: der Schwerpunkt muß mithin auf der Drehachse liegen. Weil jetzt auch ω noch beliebig ist, so hat sich die Fragestellung dahin geändert: in welchen Grenzen muß der Absolutwert von ω für vorgeschriebene Massenverteilung $\alpha, \beta, \gamma, \zeta$ eingeschlossen sein, wenn die Drehung stabil bleiben soll?

Berechnen wir für den jetzigen Fall die maßgebenden Koeffizienten (10), so finden wir rasch

$$g_1 = 2 g_0 (a + b + c),$$

$$g_2 = 4 g_0 ab,$$

mit den drei Abkürzungen

$$(25)\qquad \begin{cases} a = -\dfrac{(\alpha-\gamma)\,\omega^2+\zeta}{2\beta}, \\ b = -\dfrac{(\beta-\gamma)\,\omega^2+\zeta}{2\alpha}, \\ c = \dfrac{(\alpha+\beta-\gamma)^2}{2\alpha\beta}\,\omega^2, \end{cases}$$

so daß die drei Stabilitätskriterien (11) zusammengefaßt werden können in

$$(26)\qquad ab > 0,$$

$$(27)\qquad a+b+c-2\sqrt{ab} > 0,$$

wobei die Quadratwurzel positiv genommen werden soll.

Zufolge (26) müssen die Ausdrücke a und b gleiches Vorzeichen haben. Sind beide positiv, so ist wegen $c > 0$ auch (27) von selbst erfüllt. Wir brauchen mithin (27) nur noch für negative Werte von a und b zu untersuchen. Dabei unterscheiden wir die drei Fälle, daß der Schwerpunkt entweder auf der Achse des größten oder des mittleren oder des kleinsten Trägheitsmomentes liegt, indem wir den Kreisel dann der Reihe nach als einen *verkürzten* oder *ausgeglichenen* oder *verlängerten* bezeichnen. Überdies werden wir ihn *stehend* oder *hängend* nennen, je nachdem der Schwerpunkt über oder unter dem Stützpunkte liegt, d. h. je nachdem ζ positiv oder negativ ist.

2. Erster Fall. Der Kreisel ist ein *verkürzter*, und zwar gelte

$$(28)\qquad \gamma > \alpha > \beta.$$

Bleiben wir vorerst beim hängenden Kreisel $\zeta < 0$, so sind nach (25) und (28) die Ausdrücke a und b immer positiv, die Stabilitätsbedingungen (26) und (27) also von selbst erfüllt.

Der verkürzte hängende Kreisel ist stabil bei jeder Drehgeschwindigkeit.

Sodann gehen wir zum stehenden Kreisel $\zeta > 0$ über. Solange ω^2 oberhalb der Grenze

$$(29)\qquad \omega_1^2 = \frac{\zeta}{\gamma-\alpha}$$

liegt, sind a und b beide positiv, und die Stabilität ist gesichert. Sinkt ω^2 jedoch unter ω_1^2, so wird a negativ, während b noch positiv bleibt, bis schließlich ω^2 auf den Wert

$$(30)\qquad \omega_2^2 = \frac{\zeta}{\gamma-\beta}$$

gefallen ist. Zwischen den Grenzen ω_1^2 und ω_2^2 ist der Kreisel also auf alle Fälle labil. Für $\omega^2 < \omega_2^2$ sind a und b negativ, und es kommt jetzt darauf an, ob die Bedingung (27) erfüllt ist oder nicht.

Um dies zu entscheiden, führen wir den Wert $\omega^2 = \omega_2^2$ in (27) durch Vermittlung von (25) ein und bekommen statt (27)

$$\frac{\zeta R}{\gamma - \beta} > 0, \tag{31}$$

wo zur Abkürzung

$$R = \beta^2 + \gamma^2 + 3\alpha\beta - 2\gamma(\alpha + \beta) \tag{32}$$

gesetzt worden ist. Der Ausdruck R ist für die Stabilität des verkürzten stehenden Kreisels entscheidend, und zwar kann er sowohl positiv wie negativ werden. Er ist beispielsweise positiv, falls $\alpha : \beta : \gamma = 3 : 2{,}5 : 4$, aber negativ, falls $\alpha : \beta : \gamma = 3 : 2 : 4$ genommen wird (welche Verhältnisse mit den bekannten Ungleichungen $\alpha + \beta > \gamma$ usw., die für die Trägheitszahlen gelten, im Einklange sind). Im letzten Fall ist das Trägheitsellipsoid offenbar schlanker als im ersten, und wir heißen unseren verkürzten Kreisel demnach *schlank* oder *dick*, je nachdem $R \lesseqgtr 0$ wird.

Die Ungleichung (31) kann wegen $\zeta > 0$ und $\gamma > \beta$ nur für $R > 0$ erfüllt sein. Beim schlanken Kreisel gilt die Bedingung (27) also jedenfalls für $\omega^2 = \omega_2^2$ nicht. Bilden wir aber nach (25) den Ausdruck

$$2\alpha\beta(a + b + c) = [(\gamma - \alpha)(\gamma - \beta) + \alpha\beta]\omega^2 - (\alpha + \beta)\zeta, \tag{33}$$

so wird der Koeffizient von ω^2 zufolge (28) positiv; der Ausdruck $a + b + c$ nimmt daher mit ω^2 gleichmäßig ab. Die Bedingung (27) fordert, daß er zum mindesten nicht negativ werde. Aber gerade für $\omega^2 = \omega_2^2$ verschwindet b und stimmt mithin $a + b + c$ mit der linken Seite von (27), d. h. mit der linken Seite von (31), überein, die wir soeben negativ fanden. Es wird also $a + b + c$ für $\omega^2 \leqq \omega_2^2$ immer negativ, und dies besagt, daß beim schlanken Kreisel ein zweiter Stabilitätsbereich unterhalb ω_2^2 nicht vorhanden ist.

Für den dicken Kreisel dagegen gibt es noch einen solchen, und zwar erstreckt er sich von ω_2^2 an abwärts bis zu demjenigen Wert ω_3^2 von ω^2, welcher die linke Seite von (27) zum Verschwinden bringt. Um diesen Wert zu finden, müssen wir die Gleichung

$$(a + b + c)^2 = 4ab \tag{34}$$

auflösen. Sie ist in ω^2 quadratisch. Von ihren beiden Wurzeln macht die eine den Ausdruck $a + b + c$ negativ, ist also unbrauchbar. Die andere macht ihn positiv, und zwar ist dies gemäß der vorhin aus (33) gezogenen Folgerung die größere. Es soll also ω_3^2 den größeren der beiden Wurzelwerte ω^2 von Gleichung (34) bedeuten, und zwar folgt aus der expliziten Form dieser Gleichung, nämlich

$$a_0\omega^4 - 2a_1\omega^2 + a_2 = 0 \tag{35}$$

mit

$$(36)\qquad \begin{cases} a_0 = \gamma^2(\alpha+\beta-\gamma)^2, \\ a_1 = (\alpha+\beta-\gamma)(4\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha)\zeta, \\ a_2 = (\alpha-\beta)^2\zeta^2 \end{cases}$$

der fragliche Wert sofort zu

$$(37)\qquad \omega_3^2 = \varkappa\zeta;$$

dabei ist

$$(38)\qquad \varkappa = \frac{4\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha+2\sqrt{\alpha\beta(2\alpha-\gamma)(2\beta-\gamma)}}{\gamma^2(\alpha+\beta-\gamma)}$$

eine nur von den Trägheitszahlen abhängige Konstante. Die Quadratwurzel ist positiv zu nehmen. Wir fassen das Ergebnis zusammen:

Der verkürzte stehende Kreisel ist stabil, solange seine Drehgeschwindigkeit schneller als ω_1 bleibt. Wenn er dick ist, und nur dann, besitzt er noch einen zweiten Stabilitätsbereich zwischen ω_2 und ω_3.

Der halbsymmetrische Kreisel $\gamma = \alpha > \beta$, dessen Schwerpunkt auf einer Äquatorachse des gestreckt rotationssymmetrischen Trägheitsellipsoides liegt, ist hier einzuordnen. Für ihn ist $\omega_1^2 = \infty$ und

$$R = -\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2,$$

woraus folgt, daß für

$$1 < \frac{\alpha}{\beta} < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

ein einziger Stabilitätsbereich, dagegen für

$$\frac{\alpha}{\beta} \gtrless \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

überhaupt keiner vorhanden ist.

Der symmetrische Kreisel $\alpha = \beta \lessgtr \gamma$ endlich, dessen Schwerpunkt auf der Symmetrieachse des abgeplattet rotationssymmetrischen Trägheitsellipsoides liegt, ist wegen $R = (2\alpha-\gamma)^2 > 0$ in unserer Bezeichnungsweise immer als ein dicker anzusehen, aber es stoßen wegen $\omega_1^2 = \omega_2^2$ die beiden Stabilitätsbereiche unmittelbar aneinander und es wird dann

$$\omega_3^2 = \frac{4\alpha\zeta}{\gamma^2}$$

die bekannte untere Stabilitätsgrenze des symmetrischen aufrechten Kreisels.

3. Zweiter Fall. Der Kreisel ist ein *ausgeglichener*, und zwar gelte

$$(39)\qquad \alpha > \gamma > \beta.$$

Bleiben wir vorerst beim hängenden Kreisel $\zeta < 0$, so ist der Ausdruck b immer positiv; daher muß es nach (26) auch a sein, wonach, wie gezeigt,

auch (27) von selbst erfüllt wird. Damit aber $a > 0$ sei, muß $\omega^2 < \omega_1^2$ bleiben.

Der ausgeglichene hängende Kreisel ist stabil, solange seine Drehgeschwindigkeit langsamer als ω_1 bleibt.

Sodann gehen wir zum stehenden Kreisel $\zeta > 0$ über. Für ihn ist der Ausdruck a wegen (39) immer negativ, folglich muß es auch b sein. Dies ist der Fall, solange $\omega^2 < \omega_2^2$ ist. Um zu entscheiden, ob diese Grenze ω_2^2 größer oder kleiner als die durch die Bedingung (27) vorgeschriebene Grenze ω_3^2 wird, ob also ein Stabilitätsbereich überhaupt vorhanden ist oder nicht, setzen wir wiederum den Wert $\omega^2 = \omega_2^2$ in (27) ein und erhalten wieder die Ungleichung (31) mit dem Ausdruck R von (32), der auch hier ebensogut positiv wie negativ werden kann. Er ist beispielsweise positiv, falls $\alpha : \beta : \gamma = 3 : 1{,}5 : 2$, aber negativ, falls $\alpha : \beta : \gamma = 3 : 1{,}1 : 2$ genommen wird. Auch hier sprechen wir von einem *schlanken* oder *dicken* Kreisel, je nachdem $R \lessgtr 0$ bleibt.

Die Bedingung (31) kann ebenfalls nur für $R > 0$ erfüllt sein. Dann aber können wir die für den verkürzten Kreisel gezogenen Schlüsse wiederholen, wenn wir nur beachten, daß der Koeffizient [ ] von ω^2 in (33) auch in der Form

$$[2\beta(\alpha - \gamma) + \gamma(\beta + \gamma - \alpha)]$$

geschrieben werden kann, die zufolge (39) und der für die Stabilitätszahlen allgemein gültigen Beziehung $\beta + \gamma > \alpha$ wieder stets positiv ist.

Der ausgeglichene stehende Kreisel kann nur dann stabil sein, wenn er ein dicker ist, und zwar muß dann seine Drehgeschwindigkeit schneller als ω_3, aber langsamer als ω_2 bleiben.

Der halbsymmetrische Kreisel $\gamma = \beta < \alpha$, dessen Schwerpunkt auf einer Äquatorachse des abgeplattet rotationssymmetrischen Trägheitsellipsoides liegt, ist wegen $R = \alpha\beta > 0$ immer als ein dicker anzusprechen und besitzt daher allemal einen Stabilitätsbereich.

Stellt man übrigens noch fest, daß für $\zeta = 0$ die Grenzen $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = 0$ werden, so kommt man zu der bekannten Tatsache zurück, daß die mittlere Hauptachse des kräftefreien unsymmetrischen Kreises keine stabile Drehachse ist.

4. Dritter Fall. Der Kreisel ist ein *verlängerter*, und zwar gelte

$$\alpha > \beta > \gamma. \tag{40}$$

Bleiben wir vorerst beim hängenden Kreisel $\zeta < 0$, so sind a und b von verschiedenem Vorzeichen in dem Bereich ω_1^2 bis ω_2^2. Für $\omega^2 < \omega_1^2$ sind dagegen a und b beide positiv, und die Stabilität ist dort gesichert. Nun

fragt sich nur, ob auch oberhalb ω_2^2 noch ein zweiter Stabilitätsbereich vorhanden sein kann. Um dies zu entscheiden, kehren wir zu der Gleichung (35) für ω_3^2 zurück. Hier ist gemäß (40) der Koeffizient a_1 zugleich mit ζ negativ, wogegen a_0 und a_2 positiv bleiben. Infolgedessen besitzt jene Gleichung überhaupt keine reelle positive Wurzel ω_3^2 und die Bedingung (27) ist hier für alle Werte von ω erfüllt, die Stabilität also auch für $\omega^2 > \omega_2^2$ verbürgt.

Der verlängerte hängende Kreisel ist stabil, solange seine Drehgeschwindigkeit entweder langsamer als ω_1 oder schneller als ω_2 bleibt.

Beim symmetrischen Kreisel $\alpha = \beta \geqq \gamma$, dessen Schwerpunkt auf der Symmetrieachse des gestreckt rotationssymmetrischen Trägheitsellipsoides liegt, schrumpft wegen $\omega_1^2 = \omega_2^2$ der Labilitätsbereich in nichts zusammen: dieser Kreisel hängt bei jeder Drehgeschwindigkeit stabil.

Der hängende halbsymmetrische Kreisel $\gamma = \beta < \alpha$ bietet zu einer besonderen Bemerkung keinen Anlaß; er hat stets einen Labilitätsbereich.

Schließlich gehen wir noch zum stehenden Kreisel $\zeta > 0$ über. Jetzt sind a und b beide immer negativ, und wir haben also lediglich die Grenze ω_3^2 (37) aufzusuchen.

Der verlängerte stehende Kreisel ist stabil, solange seine Drehgeschwindigkeit schneller als ω_3 bleibt.

5. Der Übersicht halber stellen wir die gewonnenen Ergebnisse noch einmal zusammen, indem wir jedem Falle seine Stabilitätsbereiche beifügen:

I. Verkürzt, 1. hängend	0 bis ∞,
2. stehend, a) dick	ω_3 bis ω_2 und ω_1 bis ∞,
b) schlank	ω_1 bis ∞.
II. Ausgeglichen, 1. hängend	0 bis ω_1,
2. stehend, a) dick	ω_3 bis ω_2,
b) schlank	—
III. Verlängert, 1. hängend	0 bis ω_1 und ω_2 bis ∞,
2. stehend	ω_3 bis ∞.

Wir ziehen noch aus (29) und (30) sowie (37) und (38) den für alle Fälle gültigen Schluß:

Die Grenzen $\omega_1^2, \omega_2^2, \omega_3^2$ der Stabilitätsbereiche wachsen proportional mit der Entfernung $|\zeta|$ des Schwerpunkts vom Stützpunkte.

Sehr bemerkenswert, aber freilich nach den Ermittelungen von § 4 nicht ganz unerwartet, sind die Lücken von ω_1 bis ω_2 in den Stabilitätsbereichen des verkürzten stehenden dicken und des verlängerten hängenden Kreisels; die zwischen ω_1 und ω_2 liegenden Drehgeschwindigkeiten könne

ritische genannt werden. *Der ausgeglichene schlanke Kreisel ist unter llen anderen dadurch ausgezeichnet, daß er überhaupt nicht dazu ge- acht werden kann, stabil aufrechtstehend zu tanzen.*

§ 3.

Das Deviationsmoment.

1. Um einen Kreisel zu einer vorgeschriebenen Bewegung zu veran- ssen, die von seiner natürlichen Poinsotbewegung abweicht, ist ein ußeres Moment $\mathfrak{M}$ erforderlich, das sich aus den dynamischen Gleichungen ne weiteres ermitteln läßt. Es kommt uns hier darauf an, dieses oment auch für den Fall des unsymmetrischen Kreisels gehörig zu ver- utlichen, wobei wir uns im Hinblick auf unser Ziel von vornherein gleich auf eine reguläre Präzession beschränken werden.

Der Kreisel drehe sich also mit der festen Winkelgeschwindigkeit ε n eine Hauptträgheitsachse — die *Figurenachse* —, und diese beschreibe n eine raumfeste zweite Stützpunktsachse — die *Präzessionsachse* — nen Kreiskegel mit der festen Winkelgeschwindigkeit ω (Fig. 4). Genauer rstehen wir unter Figuren- bzw. Präzes- nsachse diejenigen beiden Halbstrahlen ner Achsen, welche mit dem Drehsinne n ε bzw. ω eine Rechtsschraube bilden. ls *Knotenachse* bezeichnen wir denjenigen albstrahl vom Stützpunkt aus, der auf guren- und Präzessionsachse senkrecht solchem Sinne steht, daß er die kür- ste Drehung der Präzessionsachse in die gurenachse — Drehwinkel δ — wiederum einer Rechtsschraube ergänzt. Folge- chtig sei auch das Koordinatensystem chtshändig, und zwar liege die positive Achse in der Figurenachse. In der auf der Figurenachse senkrechten *quatorebene* möge sich die x-Achse gegen die Knotenachse infolge der gendrehung ε um den Winkel φ gedreht haben; den Halbstrahl in der quatorebene, der zum Azimut $\varphi = 90^0$ gehört, heißen wir die *Querachse*.

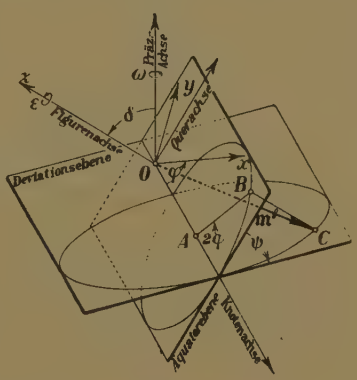


Fig. 4.

Bezeichnen wir mit $\mathfrak{m}_x$ usw. die durch das Kreiselgewicht geteilten omponenten des als axialen Vektors vorzustellenden Momentes $\mathfrak{M}$ in m körperfesten System, so lauten die Eulerschen Gleichungen

1) $$\mathfrak{m}_x = \alpha \dot{p} - (\beta - \gamma) q r$$

und zyklisch weiter. Führen wir hier vermöge

$$(42)\qquad \begin{cases} p = \omega \sin\delta \sin\varphi, \\ q = \omega \sin\delta \cos\varphi, \\ r = \omega \cos\delta + \varepsilon \end{cases}$$

die Größen ε und ω ein und bilden zugleich aus $\mathfrak{m}_x$ und $\mathfrak{m}_y$ die Komponenten $\mathfrak{m}_k$ und $\mathfrak{m}_q$ in der Knotenachse und in der Querachse, so finden wir nach leichter Zwischenrechnung

$$(43)\qquad \begin{cases} \mathfrak{m}_k = \mathfrak{m}_1 + \mathfrak{m}_2 \cos 2\varphi, \\ \mathfrak{m}_q = \quad\ \mathfrak{m}_2 \sin 2\varphi, \\ \mathfrak{m}_z = \quad -\mathfrak{m}_3 \sin 2\varphi, \end{cases}$$

mit den Abkürzungen

$$(44)\qquad \begin{cases} \mathfrak{m}_1 = \omega \sin\delta \left[\gamma\varepsilon + \left(\gamma - \frac{\alpha+\beta}{2}\right)\omega\cos\delta\right], \\ \mathfrak{m}_2 = \frac{1}{2}(\alpha-\beta)(\omega\cos\delta + 2\varepsilon)\,\omega\sin\delta, \\ \mathfrak{m}_3 = \frac{1}{2}(\alpha-\beta)\,\omega^2\sin^2\delta. \end{cases}$$

Man stellt schnell fest, daß für den symmetrischen Kreisel mit $\alpha = \beta$ die Komponenten $\mathfrak{m}_q$ und $\mathfrak{m}_z$ verschwinden, wogegen $\mathfrak{m}_k$ in die bekannte Form des Deviationsmomentes[7]) für diesen Sonderfall übergeht.

2. Das Deviationsmoment $\mathfrak{m}$ des unsymmetrischen Kreisels enthält neben dem unveränderlichen Bestandteil $\mathfrak{m}_1$, der in die Knotenachse fällt und sich nicht erheblich vom Deviationsmomente des symmetrischen Kreisels unterscheidet, noch die beiden zeitlich veränderlichen Teile $\mathfrak{m}_2$ und $\mathfrak{m}_3$, *die mit der doppelten Frequenz der Eigendrehung pulsieren*. Der Vektor $\mathfrak{m}$ läßt sich hiernach, wie folgt, veranschaulichen.

Man drehe, wie dies Fig. 4 zeigt, die Äquatorebene im Sinne abnehmender Winkel δ um die Knotenachse, und zwar um einen Winkel ψ, der durch

$$(45)\qquad \operatorname{ctg}\psi = \frac{\mathfrak{m}_2}{\mathfrak{m}_3} = \operatorname{ctg}\delta + \frac{2\varepsilon}{\omega\sin\delta}$$

bestimmt ist. Die gedrehte Ebene heiße die *Deviationsebene*. Sodann trage man vom Stützpunkte O aus in der Knotenachse den Ausdruck $\mathfrak{m}_1$ unter Berücksichtigung seines Vorzeichens auf bis zum Punkte A, ebenso vom Punkte A aus in gleicher Weise auf der Knotenachse auch den Ausdruck $\mathfrak{m}_2$ und beschreibe mit der zuletzt abgetragenen Strecke $\mathfrak{m}_2$ um A in der Äquatorebene einen Kreis mit der Winkelgeschwindigkeit 2ε, wobei man in eben dem Augenblicke beginnt, da auch die positive x-Achse

[7]) Vgl. F. Klein u. A. Sommerfeld, a. a. O., S. 175.

ie Knotenachse passiert. Schließlich errichte man im momentanen End-unkt B des sich drehenden Fahrstrahles $\mathfrak{m}_2$ auf der Äquatorebene ein ot und bringe dieses zum Schnitt mit der Deviationsebene in C. Dann ollzieht der Punkt C in der präzessierenden Deviationsebene eine Ellipsen-ewegung mit der Frequenz 2ε, *und der Fahrstrahl OC stellt den Vektor* $\mathfrak{m}$ *es Deviationsmomentes dar.*

Im Raume beschreibt der Punkt C eine Kurve, die sich anschaulich it einer Drahtspirale vergleichen läßt, welche auf einem elliptischen ulste schräg aufgewickelt ist.

Jedesmal, wenn eine Hauptträgheitsachse durch die Knotenachse geht, lso nach jeder Viertelseigendrehung des Kreisels, fällt auch der Vektor $\mathfrak{m}$ die Knotenachse.

3. Das Deviationsmoment $\mathfrak{m}$ führt unmittelbar zur Staudeschen ewegung zurück, sobald man sich die Frage vorlegt, unter welchen Be-ingungen dieses Moment durch die Schwere erzeugt werden kann. Hier uchtet zunächst wieder das von E. J. Routh[8]) auf anderem Wege ge-ndene Ergebnis ein, daß die Schwerkraft eine reguläre Präzession des nsymmetrischen Kreisels nur dann zu unterhalten vermag, wenn mit $\varepsilon = 0$ iese Präzession aus einer reinen Drehung ω um eine körper- und raum-ste Achse besteht. Denn andernfalls würde $\mathfrak{m}$ mit der Frequenz 2ε hwanken, während das Moment der Schwere doch höchstens mit der requenz ε pulsieren kann.

Bei einer reinen Drehung ω liegt der Vektor $\mathfrak{m}$ im Kreisel fest und eht sich im Raum um die Präzessionsachse. Mit $\varepsilon = 0$ wird zufolge 5) auch $\psi = \delta$, und die Deviationsebene, in welcher $\mathfrak{m}$ allemal liegt, eht jetzt senkrecht auf der Präzessionsachse. Weil das Moment der hwere immer ein wagerechter Vektor ist, so kann es also, durch das reiselgewicht geteilt, offensichtlich nur dann mit $\mathfrak{m}$ übereinstimmen, enn die Präzessionsachse im Raume lotrecht weist:

Die permanente Drehachse muß vertikal stehen.

Außerdem muß der Schwerpunkt offenbar in der zum Vektor $\mathfrak{m}$ rmalen Ebene durch den Stützpunkt liegen, die natürlich einfach entisch ist mit der Schwerpunktsebene (12). Sie steht demnach im aume senkrecht, und sie wird von der Präzessionsachse (Drehachse) in ei Halbebenen zerschnitten. Der Schwerpunkt kann allemal nur in r einen Halbebene sitzen, und zwar in derjenigen, deren Punkte unter m Einfluß der Schwere bestrebt wären, eine Drehung um den Vektor $\mathfrak{m}$ Sinne einer Rechtschraube zu beginnen.

---

[8]) A.. a O. § 214.

Der Abstand endlich des Schwerpunktes von der Drehachse muß dann noch außerdem mit der Länge des Vektors $\mathfrak{m}$ übereinstimmen. Diese berechnet sich aus den Komponenten (43); und zwar finden wir, indem wir mit

$$x_0 = \sin\delta\cos\varphi, \qquad y_0 = \sin\delta\sin\varphi, \qquad z_0 = \cos\delta$$

zu unseren ursprünglichen Richtungsgrößen x_0, y_0, z_0 übergehen,

$$|\mathfrak{m}|^2 = \omega^4 \mathfrak{S}(\beta-\gamma)^2 y_0^2 z_0^2 \tag{46}$$

im Einklang mit (2).

Die zu einem vorgeschriebenen Werte ω gehörenden Schwerpunkte erfüllen eine lotrechte Gerade mit dem Abstande $|\mathfrak{m}|$ vom Stützpunkte. Diese schneidet die in § 1 ermittelten Stabilitätsbereiche stets. Damit sind wir auf anderem Wege zum Ausgangspunkte zurückgekehrt und stellen als letztes Ergebnis fest:

Zu jeder stabilen Drehung um eine lotrechte Achse mit vorgeschriebener Winkelgeschwindigkeit ω gibt es bei vorgeschriebenen Trägheitszahlen α, β, γ einfach unendlich viele Lagen des Schwerpunktes. Diese Lagen füllen in der zulässigen Schwerpunktshalbebene zwei (möglicherweise zusammenstoßende) Strecken aus, welche auf einer lotrechten Geraden mit dem Abstand $|\mathfrak{m}|$ vom Stützpunkte liegen und aus dieser ausgeschnitten werden durch den Zwischenraum der beiden Kegel zweiter Ordnung $g_2 = 0$ und $k = 0$

(Eingegangen am 19. Juni 1919.)

Über die Zerlegbarkeit von flächentreu aufeinander bgebildeten Gebieten in unendlich kleine, paarweise kongruente Teile.

Von

M. Lagally in München.

Die Frage der Zerlegbarkeit inhaltsgleicher ebener Figuren, deren Berenzung von geraden Linien oder von paarweise kongruenten Kurvenbögen ebildet wird, in eine endliche Anzahl von paarweise kongruenten Teilfiguren at wegen ihrer Bedeutung für die Grundlagen der Geometrie eingehende ntersuchung gefunden. Dagegen scheint über die mehr flächentheoretisch teressante Zerlegungsgleichheit von beliebig begrenzten, ebenen oder auf rummen Flächen gelegenen, im gewöhnlichen Sinne inhaltsgleichen, aber icht endlich gleichen Gebieten keine Literatur vorhanden zu sein.

Auf ein Beispiel für die Zerlegbarkeit zweier solcher Gebiete in nendlich viele paarweise kongruente Rechtecke hat mich Herr Prof. insterwalder aufmerksam gemacht, das sich bei der Abbildung der ugel auf den längs des Äquators berührenden Kreiszylinder mittels der ambertschen flächentreuen Zylinderprojektion ergibt. Bezeichnet man änge und Breite eines Punktes der Kugeloberfläche mit λ und φ, so ist as Linienelement auf der Kugel vom Radius 1

$$ds_1^2 = d\varphi^2 + \cos^2\varphi\, d\lambda^2,$$

as Linienelement auf dem Bildzylinder dagegen

$$ds_2^2 = \cos^2\varphi\, d\varphi^2 + d\lambda^2.$$

ildet man auf der Kugel aus Meridianen und Parallelkreisen ein Kurvenetz mit solcher Verteilung der Netzlinien, daß für beide Kurvenscharen e Differenz der Parameter zweier aufeinander folgender Kurven auf der nzen Kugel denselben konstanten Wert $d\varphi = d\lambda = \delta$ besitzt, so ist das ld einer rechtwinkligen Netzmasche auf der Kugel mit den Seiten δ und $\cdot \cos\varphi$ ein Rechteck auf dem Zylinder mit den Seiten $\delta \cdot \cos\varphi$ und δ.

Denkt man sich also die Kugelfläche in die rechtwinkligen Maschen zerschnitten und diese nach Drehung um 90^0 wieder zusammengesetzt, so wird aus den Teilen der Kugelfläche der Zylindermantel aufgebaut.

Im allgemeinen ist, wie die folgende Untersuchung zeigt, bei flächentreuer Abbildung keine derartige Zerlegung in Rechtecke möglich. Dagegen gibt es stets, wenn das Abbildungsgesetz bekannt ist, unendlich viele Zerlegungen beider Gebiete in paarweise symmetrische Parallelogramme, die also durch Umklappen zur Deckung gebracht werden können, wenn man nicht Wert darauf legt, durch nochmalige Zerschneidung jedes Parallelogramms etwa in zwei kongruente gleichschenklige Trapeze auch die Möglichkeit einer Deckung durch Verschiebung herzustellen. Die Kurvennetze, welche die Zerlegung in symmetrische Parallelogramme leisten, zerfallen in zwei verschiedene Arten, welche im folgenden als „längentreue" und „längenvertauschte" Netze auseinandergehalten sind.

Eine Abbildung zweier ebener oder auf krummen Flächen gelegener Gebiete läßt sich, wenn $u = \text{const.}$ und $v = \text{const.}$ zwei einander auf beiden Flächenstücken entsprechende Kurvenscharen sind, in folgender Weise herstellen:

$$x_1 = x_1(u, v), \qquad x_2 = x_2(u, v),$$
$$y_1 = y_1(u, v), \qquad y_2 = y_2(u, v),$$
$$z_1 = z_1(u, v), \qquad z_2 = z_2(u, v).$$

Die Abbildung ist flächentreu, wenn die das Linienelement auf beiden Flächen darstellenden quadratischen Formen:

$ds_1^2 = E_1 du^2 + 2F_1 du\,dv + G_1 dv^2$, $ds_2^2 = E_2 du^2 + 2F_2 du\,dv + G_2 dv^2$

dieselbe Determinante besitzen, die dann, weil die beiden Formen definit sind, einen positiven Wert hat. Also

$$E_1 G_1 - F_1^2 = E_2 G_2 - F_2^2 = \Delta > 0.$$

Bei jeder Abbildung gibt es in jedem Punkte zwei sich zu zwei Kurvennetzen zusammenschließende Richtungen, in denen die Abbildung längentreu ist, also $ds_1^2 = ds_2^2$ ist.

Diese Richtungen ergeben sich aus den Wurzeln der in $\frac{dv}{du}$ quadratischen Gleichung

$$S = ds_1^2 - ds_2^2 = (E_1 - E_2) du^2 + 2(F_1 - F_2) du\,dv + (G_1 - G_2) dv^2 = 0.$$

Bei flächentreuer Abbildung sind die längentreuen Richtungen stets reell; die Determinante D von S ist nämlich negativ, wie sich in folgender Weise ergibt:

$$D = (E_1 - E_2)(G_1 - G_2) - (F_1 - F_2)^2$$
$$= (E_1 G_1 - F_1^2) + (E_2 G_2 - F_2^2) - (E_1 G_2 + E_2 G_1 - 2F_1 F_2).$$

ie beiden ersten Summanden sind gleich der Determinante Δ; führt an in dem 3. Glied die aus der Determinante Δ berechneten Ausücke ein:

$$G_1 = \frac{\Delta + F_1^2}{E_1}, \qquad G_2 = \frac{\Delta + F_2^2}{E_2},$$

ergibt sich

$$D = 2\Delta - \frac{E_1}{E_2}\Delta - \frac{E_1}{E_2}F_2^2 - \frac{E_2}{E_1}\Delta - \frac{E_2}{E_1}F_1^2 + 2F_1F_2,$$

$$D = -\Delta\left(\sqrt{\frac{E_1}{E_2}} - \sqrt{\frac{E_2}{E_1}}\right)^2 - \left(\sqrt{\frac{E_1}{E_2}}F_2 - \sqrt{\frac{E_2}{E_1}}F_1\right)^2.$$

ieser letztere Ausdruck ist, da Δ positiv ist und die beiden Quadrate cht gleichzeitig verschwinden, sicher negativ; also ist

$$D < 0.$$

ie Differenz zweier verschiedener definiter Formen von gleicher Deterinante ist eine indefinite Form.

Nachdem hiermit die Existenz von zwei reellen längentreuen Kurvenharen bei flächentreuer Abbildung nachgewiesen ist, sollen die Winkel und ω_2 berechnet werden, unter denen sich zwei Kurven der beiden haren in entsprechenden Punkten beider Flächen schneiden. Sind $\frac{dv}{du}$ d $\frac{\delta v}{\delta u}$ die den beiden längentreuen Richtungen entsprechenden Wurzeln n $S = 0$, und ds und δs die zugehörigen Linienelemente, so ist

$$\cos\omega_1 = \frac{E_1\,du\,\delta u + F_1(du\,\delta v + dv\,\delta u) + G_1\,dv\,\delta v}{ds\,\delta s},$$

$$\cos\omega_2 = \frac{E_2\,du\,\delta u + F_2(du\,\delta v + dv\,\delta u) + G_2\,dv\,\delta v}{ds\,\delta s}.$$

us den Koeffizienten der Gleichung $S = 0$ ergeben sich für die symetrischen Funktionen der Wurzeln die Werte:

$$\frac{dv}{du} + \frac{\delta v}{\delta u} = -2\frac{F_1 - F_2}{G_1 - G_2}, \qquad \frac{dv}{du}\cdot\frac{\delta v}{\delta u} = \frac{E_1 - E_2}{G_1 - G_2}.$$

eraus folgt:

$$\operatorname{tg}\omega_1 = \frac{1}{G_1 - G_2}\cdot[E_1(G_1 - G_2) - 2F_1(F_1 - F_2) + G_1(E_1 - E_2)]\frac{du}{ds}\cdot\frac{\delta u}{\delta s},$$

$$\operatorname{tg}\omega_2 = \frac{1}{G_1 - G_2}\cdot[E_2(G_1 - G_2) - 2F_2(F_1 - F_2) + G_2(E_1 - E_2)]\frac{du}{ds}\cdot\frac{\delta u}{\delta s}.$$

e beiden Ausdrücke in den eckigen Klammern unterscheiden sich unter raussetzung flächentreuer Abbildung nur durch das Vorzeichen; es ist mlich

$$(G_1 - G_2) - 2F_1(F_1 - F_2) + G_1(E_1 - E_2) = 2(E_1G_1 - F_1^2) - E_1G_2 + 2F_1F_2 - G_1E_2,$$

$$(G_1 - G_2) - 2F_2(F_1 - F_2) + G_2(E_1 - E_2) = -2(E_2G_2 - F_2^2) + E_1G_2 - 2F_1F_2 + G_1E_2.$$

Also ist

$$\cos \omega_1 = -\cos \omega_2,$$
$$\omega_1 + \omega_2 = 180^0.$$

Die Schnittwinkel der längentreuen Kurven in entsprechenden Punkten beider Flächen ergänzen sich also zu 180^0 [1])

Die Ableitung setzt voraus, daß die Abbildung nicht isometrisch ist; in diesem Fall würde das Linienelement auf beiden Flächen für jede Richtung $\frac{dv}{du}$ übereinstimmen; die Gleichung $S = 0$ ist identisch erfüllt.

Wenn man jetzt auf beiden Flächen die beiden Kurvensysteme der bei jeder flächentreuen Abbildung vorhandenen längentreuen Netzes als Parameterkurven α, β einführt, so wird

$$ds_1^2 = E_1 du^2 + 2F_1 du dv + G_1 dv^2 = A d\alpha^2 + 2B d\alpha d\beta + C d\beta^2,$$
$$ds_2^2 = E_2 du^2 + 2F_2 du dv + G_2 dv^2 = A d\alpha^2 - 2B d\alpha d\beta + C d\beta^2$$

Durch Subtraktion ergibt sich

$$S = (E_1 - E_2) du^2 + 2(F_1 - F_2) du dv + (G_1 - G_2) dv^2 = 4B d\alpha d\beta.$$

Zerlegt man die linke Seite in zwei Linearfaktoren

$$(E_1 - E_2) du^2 + 2(F_1 - F_2) du dv + (G_1 - G_2) dv^2 = (p du + q dv)(p' du +$$

so ist

$$d\alpha = \varrho(p du + q dv), \qquad \alpha = \int \varrho(p du + q dv),$$
$$d\beta = \varrho'(p' du + q' dv), \quad \beta = \int \varrho'(p' du + q' dv).$$

Die letzteren Ausdrücke geben die *längentreuen Kurven in geschlossener Form*; dabei sind ϱ und ϱ' *zwei integrierende Faktoren, auf deren Aufsuchung also das Problem zurückgeführt ist.*

Von der Wahl der integrierenden Faktoren ist die Anordnung der Netzkurven und damit Gestalt und Größe der Netzmaschen an jeder Stelle der beiden Netze abhängig. Da in jeden integrierenden Faktor eine willkürliche Funktion eingeht, *hängt die Anordnung der zwei Scharen längentreuer Kurven zu längentreuen Netzen von zwei willkürlichen Funktionen ab.*

Diese Tatsache erhält erhöhte Bedeutung, wenn man die von den Diagonalkurven der längentreuen Netze gebildeten Netze betrachtet. Diese Diagonalnetze ändern sich gestaltlich und werden im allgemeinen von anderen Kurven gebildet, wenn die Anordnung der Kurven der längen-

[1]) Vgl. hierzu und zum vorhergehenden E. Study, Vorlesungen über ausgewählte Gegenstände der Geometrie. 1. Heft: Ebene analytische Kurven und zu ihnen gehörige Abbildungen, Leipzig 1911, § 7, S. 60.

uen Netze geändert wird. Ein Paar einander auf beiden Flächen entechender Diagonalnetze besitzt folgende, geometrisch ohne weiteres erhtliche Eigenschaft: In entsprechenden Maschen haben entsprechende inkel gleiche Größe, während die *nicht* entsprechenden Seiten gleiche nge besitzen. Die Diagonalnetze sollen deshalb *längenvertauschte Netze* ißen. Umgekehrt bilden die Diagonalkurven eines Paares von längenrtauschten Netzen wieder längentreue Netze. *Die längenvertauschten tze sind also den Anordnungen der längentreuen Kurven zu längenuen Netzen eindeutig zugeordnet* und wie diese von zwei willkürlichen nktionen abhängig (Fig. 1).

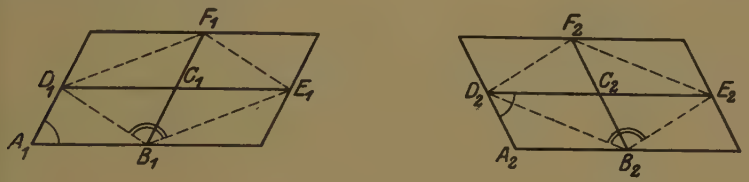


Fig. 1.

Um das Linienelement, bezogen auf ein längenvertauschtes Netz. zu halten, hat man die Parameter $\mu = \frac{\alpha+\beta}{2}$; $\nu = \frac{\alpha-\beta}{2}$ der Diagonalen eines ngentreuen Netzes einzuführen. Dann wird

$$ds_1^2 = (A + 2B + C)d\mu^2 + 2(A - C)d\mu\,d\nu + (A - 2B + C)d\nu^2,$$
$$ds_2^2 = (A - 2B + C)d\mu^2 + 2(A - C)d\mu\,d\nu + (A + 2B + C)d\nu^2,$$

er kurz

$$ds_1^2 = a_{11}\,d\mu^2 + 2a_{12}\,d\mu\,d\nu + a_{22}\,d\nu^2,$$
$$ds_2^2 = a_{22}\,d\mu^2 + 2a_{12}\,d\mu\,d\nu + a_{11}\,d\nu^2.$$

e Gleichheit entsprechender Winkel ist hieraus zu erkennen; für die eichheit nicht entsprechender Seiten einer Masche ist die Verteilung nach m Gesetz $d\mu = d\nu = \text{const.}$ über das ganze Netz hin notwendig.

Wenn $A = C$ ist, wird $a_{12} = 0$; aus einem längengleichen Rhombentz geht ein längenvertauschtes Rechtecksnetz hervor. Ein längengleiches ombennetz ist unter den Anordnungen der längentreuen Kurven nur nn enthalten, wenn sich zwei Funktionen $f_1(\alpha)$ und $f_2(\beta)$ so angeben sen, daß $Af_1(\alpha) = Cf_2(\beta)$ ist.

Längengleiche Rechtecksnetze sind nicht möglich, ohne daß die Abdung isometrisch wird.

In der Figur 1 sind $A_1B_1C_1D_1$ und $A_2B_2C_2D_2$ entsprechende Maschen eier längentreuer Netze; $B_1E_1F_1D_1$ und $B_2E_2F_2D_2$ entsprechende schen der zugehörigen längenvertauschten Netze. Dann gelten folgende ziehungen:

In den längentreuen Netzen ist:

$$A_1B_1 = A_2B_2,$$
$$A_1D_1 = A_2D_2,$$
$$\sphericalangle A_1 = \sphericalangle D_2.$$

In den längenvertauschten Netzen ist

$$B_1D_1 = B_2E_2,$$
$$B_1E_1 = B_2D_2,$$
$$\sphericalangle B_1 = \sphericalangle B_2.$$

In beiden Fällen lassen sich entsprechende Netzmaschen durch eine geeignete Umklappung zur Deckung bringen.

Beispiele:

1. Bei der auf Seite 1 besprochenen Abbildung durch die *Lambertsche flächentreue Zylinderprojektion* bilden die Meridiane und Parallelkreise auf der Kugel mit ihren Bildkurven, den Mantellinien und Parallelkreisen des Kreiszylinders längenvertauschte Rechtecksnetze; die Diagonalkurven dieser beiden Netze bilden längengleiche Rhombennetze.

2. *Abbildung des Kreises vom Radius* 1 *auf ein Quadrat von der Seite* $\sqrt{\pi}$. In der Ebene des Kreises seien zunächst Polarkoordinaten r_1, φ_1, in der Ebene des Quadrats rechtwinklige Koordinaten x_2, y_2 eingeführt; dann sind die Linienelemente:

$$ds_1^2 = dr_1^2 + r_1^2\,d\varphi_1^2, \qquad ds_2^2 = dx_2^2 + dy_2^2.$$

Es sollen nun die Kreisradien $\varphi_1 = \text{const.}$ auf die Geraden $y_2 = \text{const.}$ abgebildet werden durch

$$\frac{\varphi_1}{2\pi} = \frac{y_2}{\sqrt{\pi}}, \qquad \varphi_1 = 2\sqrt{\pi}\,y_2.$$

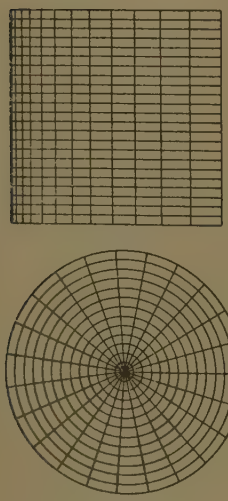


Fig. 2.

Dann entsprechen den Kreisen $r_1 = \text{const.}$ die Geraden $x_2 = \text{const.}$ in einer Anordnung, die durch die Bedingung der Flächentreue bestimmt ist:

$$\tfrac{1}{2}r_1^2\,d\varphi_1 = x_2\,dy_2,$$

also

$$x_2 = r_1^2\sqrt{\pi}.$$

Wenn man jetzt

$$r_1 = u, \qquad x_2 = \sqrt{\pi}\,u^2$$

und

$$y_2 = v, \qquad \varphi_1 = 2\sqrt{\pi}\,v$$

einführt, so wird

$$ds_1^2 = du^2 + 4\pi u^2\,dv^2, \qquad ds_2^2 = 4\pi u^2\,du^2 + dv^2.$$

Diese beiden Linienelemente gehören von selbst längenvertauschten Rechtecksnetzen an, wenn man die Maschenlängen dadurch bestimmt, daß man

ganzen Abbildungsbereich $du = dv = \text{const.}$ setzt; die Behandlung der eichung $S = 0$ erübrigt sich.

Teilt man den Kreisradius in p und den Umfang in q gleiche Teile, ist

$$dr_1 = \frac{1}{p}, \quad d\varphi_1 = \frac{2\pi}{q}, \quad \text{also} \quad du = \frac{1}{p}, \quad dv = \frac{\sqrt{\pi}}{q};$$

glich müßte $\frac{q}{p} = \sqrt{\pi}$ sein; für die Herstellung einer Figur mit endlichen schenlängen genügt es, $\sqrt{\pi}$ durch einen Näherungswert, etwa $\frac{22}{13}$ zu erzen (Fig. 2).

3. *Abbildung der Kugel auf die Ebene durch die Sanson-amsteedsche Projektion.* Ein Netz von Meridianen $u = \text{const.}$ und rallelkreisen $v = \text{const.}$ der Kugel vom Radius 1 wird derart auf die ene abgebildet, daß die Parallelkreise in parallele Gerade übergehen, denen die Bogenlängen längentreu aufgetragen werden; von den Meridinen geht einer, der Ausgangsmeridian, in eine dazu senkrechte Gerade r, und zwar ebenfalls unter längentreuer Abbildung. Die Bilder der leren Meridiane sind damit bestimmt. Daß die Abbildung flächentreu ist geometrisch ohne weiteres ersichtlich.

Für die Koordinaten der Kugelpunkte (1) und der Punkte in der ene (2) hat man

$$\begin{aligned} x_1 &= \cos v \cos u, & x_2 &= u \cos v, \\ y_1 &= \cos v \sin u, & y_2 &= v, \\ z_1 &= \sin v, & z_2 &= 0. \end{aligned}$$

n sind die beiden Linienelemente

$$ds_1^2 = \cos^2 v\, du^2 + dv^2,$$

$$ds_2^2 = \cos^2 v\, du^2 - 2u \sin v \cos v\, du\, dv + (u^2 \sin^2 v + 1)\, dv^2;$$

erdem ist

$$\Delta = E_1 G_1 - F_1^2 = E_2 G_2 - F_2^2 = \cos^2 v.$$

die Kurven α, β des längentreuen Netzes zu erhalten, bildet man Ausdruck

$$S = ds_1^2 - ds_2^2 = 2u \sin v \cos v\, du\, dv - u^2 \sin^2 v\, dv^2 = 4B\, d\alpha\, d\beta.$$

egung der linken Seite in Linearfaktoren gibt

$$\begin{aligned} d\alpha &= \varrho (2u \cos v\, du - u^2 \sin v\, dv), \\ d\beta &= \varrho' \sin v\, dv, \end{aligned}$$

ϱ und ϱ' integrierende Faktoren sind. Setzt man

$$\varrho = \frac{1}{u^2 \cos v}, \qquad \varrho' = \frac{1}{\sin v},$$

so wird

$$d\alpha = \frac{2\,du}{u} - \operatorname{tg} v\,dv, \qquad \text{also} \quad \alpha = \lg(u^2 \cos v),$$

$$d\beta = dv, \qquad \beta = v.$$

An Stelle von α führt man besser durch eine andere Anordnung der Netzkurven $\bar{\alpha} = e^{\frac{\alpha}{2}}$ ein; dann sind

$$u\sqrt{\cos v} = \bar{\alpha}, \qquad v = \beta$$

die Kurven des längentreuen Netzes, bezogen auf das geographische Koordinatensystem auf der Kugel. Die entsprechenden Kurven der Ebene sind in rechtwinkligen Koordinaten

$$x_2 = \bar{\alpha}\sqrt{\cos y_2}, \qquad y_2 = \beta.$$

Für das Linienelement ergibt sich auf der Kugel und in der Ebene

$$ds_1^2 = \cos\beta\, d\bar{\alpha}^2 + \bar{\alpha}\sin\beta\, d\bar{\alpha}\, d\beta + \left(\frac{\bar{\alpha}^2}{4}\frac{\sin^2\beta}{\cos\beta} + 1\right) d\beta^2,$$

$$ds_2^2 = \cos\beta\, d\bar{\alpha}^2 - \bar{\alpha}\sin\beta\, d\bar{\alpha}\, d\beta + \left(\frac{\bar{\alpha}^2}{4}\frac{\sin^2\beta}{\cos\beta} + 1\right) d\beta^2.$$

Um auch noch ein längenvertauschtes Netz zu erhalten, hat man die Diagonalkurven μ, ν des längentreuen Netzes bei beliebiger Anordnung seiner Kurven, etwa der durch $\bar{\alpha}$ und β bestimmten, zu ziehen:

$$\mu = \frac{\bar{\alpha} + \beta}{2}, \qquad \nu = \frac{\bar{\alpha} - \beta}{2}.$$

Die Netzkurven sind dann auf der Kugel:

$$2\mu = u\sqrt{\cos v} + v, \qquad 2\nu = u\sqrt{\cos v} - v$$

und in der Ebene:

$$2\mu = \frac{x_2}{\sqrt{\cos y_2}} + y_2; \qquad 2\nu = \frac{x_2}{\sqrt{\cos y_2}} - y_2.$$

(Eingegangen am 2. Juli 1919.)

Über die Nullstellen der Zetafunktion.

Von

Edmund Landau in Göttingen.

In dieser Arbeit werde die Riemannsche Vermutung $\zeta(s) \neq 0$ *für* $> \frac{1}{2}$ *als wahr angenommen.*

$N(T)$ bedeute die Anzahl der Wurzeln von $\zeta(s)$ auf der Strecke $= \frac{1}{2} + ti$, $0 < t \leqq T$; es werde

$$N(T) - \frac{1}{2\pi} T \log T + \frac{1 + \log 2\pi}{2\pi} T = R(T)$$

setzt. Bekanntlich ist, wenn T „wurzelfrei" ins Unendliche wächst,

$$R(T) = O(1) + \frac{1}{\pi} \Im \int_{2+Ti}^{\frac{1}{2}+Ti} \frac{\zeta'}{\zeta}(s)\, ds.$$

rr Bohr[1]) hatte unter Heranziehung eines Littlewoodschen Satzes

$$R(T) = o(\log T)$$

wiesen. Kürzlich hat Herr Cramér im zweiten Teil der in dieser itschrift[2]) unter obigem Titel erschienenen Abhandlung sogar

$$R(T) = O\left(\log T \sqrt{\frac{\log\log\log T}{\log\log T}}\right)$$

wiesen, unter Heranziehung des schärferen Littlewoodschen Satzes[3])

r $\frac{1}{2} + \frac{1}{\log\log t} \leqq \sigma \leqq 1$ ist bei wachsendem t gleichmäßig in σ

$$\log \zeta(s) = O\left(\left(\frac{\log t \log\log t}{\log\log\log t}\right)^{2(1-\sigma)} \log\log\log t\right).$$

---

[1]) Vgl. S. 1144–1150 der Arbeit von Bohr, Landau und Littlewood: *Sur fonction* $\zeta(s)$ *dans le voisinage de la droite* $\sigma = \frac{1}{2}$ [Académie royale de Belgique, lletins de la classe des sciences, 1913. S. 1144–1175].

[2]) 2 (1918), S. 237–241.

[3]) Es bedeute $\log \zeta(s)$ die für $s > 1$ durch $\sum_{p,m} \frac{1}{m p^{ms}}$ definierte, in der von bis $\frac{1}{2}$ aufgeschlitzten Halbebene $\sigma > \frac{1}{2}$ reguläre Funktion.

Ich werde nun zeigen, daß durch Kombination von (2) mit der Bohrschen (statt Cramérschen) Methode sogar

$$R(T) = O\left(\log T \frac{(\log\log\log T)^2}{\log\log T}\right)$$

herauskommt. Da $R(T)$ nach rechts stetig ist, genügt es offenbar, T wurzelfrei wachsen zu lassen; alsdann lautet nach (1) meine Behauptung

$$(3) \qquad \Im \int_{2+Ti}^{\frac{1}{2}+Ti} \frac{\zeta'}{\zeta}(s)\,ds = O\left(\log T \frac{(\log\log\log T)^2}{\log\log T}\right).$$

Nach (2) ist für $\frac{1}{2} + \frac{\log\log\log t}{\log\log t} \leqq \sigma \leqq 1$ gleichmäßig

$$\log\zeta(s) = O\left(\left(\frac{\log t \log\log t}{\log\log\log t}\right)^{1-2\frac{\log\log\log t}{\log\log t}} \log\log\log t\right)$$

$$= O\left(\log t \log\log t\, e^{-2\frac{\log\log\log t}{\log\log t}(\log\log t + \log\log\log t - \log\log\log\log t)}\right)$$

$$(4) \qquad = O\left(\frac{\log t}{\log\log t}\right).$$

Für $\sigma = \frac{1}{2} + 2\frac{\log\log\log t}{\log\log t}$ ist also (weil jeder Punkt $u+vi$ des Kreises um s mit dem Radius $\frac{1}{2}\frac{\log\log\log t}{\log\log t}$ für große t dem Gebiet $\frac{1}{2} + \frac{\log\log\log v}{\log\log v} \leqq u \leqq 1$ angehört)

$$\frac{\zeta'}{\zeta}(s) = O\left(\frac{\log t}{\log\log t}\frac{\log\log t}{\log\log\log t}\right) = o(\log t) = O(\log t).$$

Aus der Identität

$$(5) \qquad \sum_{\varrho}\left(\frac{1}{s-\varrho} + \frac{1}{\varrho}\right) = \frac{\zeta'}{\zeta}(s) - b + \frac{1}{s-1} + \frac{1}{2}\frac{I'}{I}\left(\frac{s}{2}+1\right)$$

folgt also für $\sigma = \frac{1}{2} + 2\frac{\log\log\log t}{\log\log t}$

$$\sum_{\varrho}\left(\frac{1}{s-\varrho} + \frac{1}{\varrho}\right) = O(\log t),$$

$$\sum_{\varrho}\Re\left(\frac{1}{s-\varrho} + \frac{1}{\varrho}\right) = O(\log t);$$

wegen

$$\Re\frac{1}{s-\varrho} = \frac{\sigma-\frac{1}{2}}{(\sigma-\frac{1}{2})^2+(t-\gamma)^2} > 0, \qquad \Re\frac{1}{\varrho} > 0 \quad (\varrho = \tfrac{1}{2}+\gamma i),$$

ist daher

$$\sum_{t<\gamma\leqq t+2\frac{\log\log\log t}{\log\log t}} \frac{\sigma-\frac{1}{2}}{(\sigma-\frac{1}{2})^2+(t-\gamma)^2} = O(\log t).$$

les der $N\left(t+2\frac{\log\log\log t}{\log\log t}\right)-N(t)$ Glieder links ist

$$\geqq \frac{2\frac{\log\log\log t}{\log\log t}}{\left(2\frac{\log\log\log t}{\log\log t}\right)^2+\left(2\frac{\log\log\log t}{\log\log t}\right)^2}=\frac{1}{4}\frac{\log\log t}{\log\log\log t};$$

ıer ist

$$N\left(t+2\frac{\log\log\log t}{\log\log t}\right)-N(t)=O\left(\log t\,\frac{\log\log\log t}{\log\log t}\right).$$

Es sei nun das wurzelfreie $T>e^e$, so daß $\log\log\log T>0$ ist. Es rde das Intervall $T-1<t<T+1$ von T aus symmetrisch in beiden chtungen in Teilintervalle der Länge $\delta=\delta(T)=\frac{\log\log\log T}{\log\log T}$ eingeteilt, bei die beiden äußersten eventuell kürzer sein müssen und der gemeine Endpunkt zweier angrenzender Teilintervalle zum linken gerechnet rde. Dann ist nach (6) für wachsendes T gleichmäßig in jedem Teilervall die Anzahl der γ

$$O(\delta\log T).$$

enn wird der linke Endpunkt eines Teilintervalls mit t bezeichnet, so für große T gleichmäßig seine Länge $<2\frac{\log\log\log t}{\log\log t}$ und die rechts (6) auftretende Funktion $\log t\frac{\log\log\log t}{\log\log t}<2\frac{\log\log\log T}{\log\log T}\log T=2\delta\log T$.)

raus folgt, wenn $\sum_0$ sich auf die ϱ mit $T-1<\gamma<T+1$ bezieht,

$$\sum_{\varrho}{}_0\frac{1}{s-\varrho}ds\Big|\leqq\sum_{\varrho}{}_0\left|\Im\int_{\frac{1}{2}+\delta+Ti}^{\frac{1}{2}+Ti}\frac{ds}{s-\varrho}\right|=\sum_{\varrho}{}_0\operatorname{arc\,tg}\frac{\delta}{|T-\gamma|}\leqq\sum_{\varrho}{}_0\operatorname{Min.}\left(\frac{\pi}{2},\frac{\delta}{|T-\gamma|}\right);$$

ersten, zweiten, dritten, ... Intervall, von T aus nach beiden Seiten zählt, ist nun bzw. $|T-\gamma|\geqq 0,\ \delta,\ 2\delta,\ldots$; daher ist

$$\Im\int_{\frac{1}{2}+\delta+Ti}^{\frac{1}{2}+Ti}\sum_{\varrho}{}_0\frac{1}{s-\varrho}ds=O\left(\delta\log T\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\delta}{\delta}+\frac{\delta}{2\delta}+\frac{\delta}{3\delta}+\cdots+\frac{\delta}{\left[\frac{1}{\delta}\right]\delta}\right)\right)$$

$$=O\left(\delta\log T\sum_{n=1}^{\left[\frac{1}{\delta}\right]}\frac{1}{n}\right)=O\left(\delta\log\frac{1}{\delta}\log T\right).$$

Aus (5) folgt nun bekanntlich[4]) für $\frac{1}{2}\leqq\sigma\leqq 1$ gleichmäßig

[4]) Vgl. S. 372 meines *Handbuchs der Lehre von der Verteilung der Primzahlen* eipzig und Berlin (Teubner), 1909].

$$\frac{\zeta'}{\zeta}(s) = \sum_{\varrho}{}_0 \frac{1}{s-\varrho} + O(\log t);$$

daher ist wegen (7)

$$\Im \int_{\frac{1}{2}+\delta+Ti}^{\frac{1}{2}+Ti} \frac{\zeta'}{\zeta}(s)\,ds = \Im \int_{\frac{1}{2}+\delta+Ti}^{\frac{1}{2}+Ti} \sum_{\varrho}{}_0 \frac{1}{s-\varrho}\,ds + O(\delta \log T)$$

$$= O(\delta \log \frac{1}{\delta} \log T) = O\Big(\log T \frac{(\log\log\log T)^2}{\log\log T}\Big). \tag{8}$$

Andererseits ist nach (4)

$$\Im \int_{2+Ti}^{\frac{1}{2}+\delta+Ti} \frac{\zeta'}{\zeta}(s)\,ds = \Im \log \zeta(\tfrac{1}{2}+\delta+Ti) - \Im \log \zeta(2+Ti) = O\Big(\log T \frac{1}{\log \log} \tag{9}$$

aus (8) und (9) folgt (3).

Göttingen, den 15. Juli 1919.

(Eingegangen am 17. Juli 1919.)

Bemerkung zu der vorstehenden Arbeit des Herrn E. Landau.

Von

Harald Cramér in Stockholm.

In der vorstehenden Arbeit[1]) verschärft Herr E. Landau eine früher
n mir[2]) gegebene Abschätzung für das Restglied $R(T)$ der Formel

$$N(T) = \frac{T}{2\pi}\left(\log\frac{T}{2\pi} - 1\right) + R(T).$$

Es bezeichnet hier $N(T)$ wie gewöhnlich die Anzahl der Wurzeln
$+\gamma i$ der Gleichung $\zeta(s) = 0$, die der Beziehung $0 < \gamma \leqq T$ genügen,
d es wird bei Herrn Landau, wie auch in dieser Arbeit, die Riemann-
he Vermutung als wahr angenommen, so daß immer $\beta = \frac{1}{2}$ ist.

Es erscheint mir nun recht eigentümlich, daß diese Resultate, welche
sentlich aus einem Littlewoodschen Satze über die Größenordnung
r Funktion $\log\zeta(s)$ im kritischen Streifen (vgl. Gleichung (2) unten)
folgert werden, umgekehrt eine Verschärfung jenes Satzes zulassen.
sselbe gilt für meine frühere Abschätzung von $R(T)$, wie ich schon
r mehr als einem Jahre anläßlich meiner diesbezüglichen Arbeit gefunden
be. Durch die Anwendung der Gleichung (6) der Landauschen Arbeit
rd es aber möglich, der angedeuteten Verschärfung eine besonders ein-
che Form zu geben, wie ich hier ausführen will.

Es lautet jene Gleichung

$$N\left(t + 2\frac{\log\log\log t}{\log\log t}\right) - N(t) = O\left(\log t\frac{\log\log\log t}{\log\log t}\right).$$

Wie Herr Landau nehme ich hier t wurzelfrei und $> e^e$ an und
le das Intervall $(t-1, t+1)$ von t ausgehend nach beiden Seiten in

[1]) E. Landau, Über die Nullstellen der Zetafunktion, Mathematische Zeitschrift, 6 (1920), S. 151–154.

[2]) H. Cramér, Über die Nullstellen der Zetafunktion, Mathematische Zeitschrift, 2 (1918), S. 237–241.

Teilintervalle der Länge $\delta = \delta(t) = \frac{\log\log\log t}{\log\log t}$ ein. In jedem Teilintervall wird dann die Anzahl der γ

$$O(\delta \log t).$$

Wird nun $\frac{1}{2} + \frac{1}{\log\log t} \leqq \sigma \leqq 2$ angenommen, so gilt gleichmäßig in σ

$$\frac{\zeta'}{\zeta}(s) = \frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma + it) = \sum \frac{1}{s - \frac{1}{2} - i\gamma} + O(\log t),$$

wo die Summe über die der Bedingung $|t - \gamma| < 1$ genügenden γ zu erstrecken ist[3]). Ich fasse nun wie Herr Landau die den einzelnen Teilintervallen zugehörenden Glieder zusammen, und es ergibt sich weiter:

$$\begin{aligned}
\frac{\zeta'}{\zeta}(s) &= O\left(\sum_{|t-\gamma|<1} \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{\log\log t}\right)^2 + (t-\gamma)^2}}\right) + O(\log t) \\
&= O\left[\sum_{|t-\gamma|<1} \operatorname{Min}\left(\log\log t, \frac{1}{|t-\gamma|}\right)\right] + O(\log t) \\
&= O\left[\delta \log t \left(\log\log t + \frac{1}{\delta} + \frac{1}{2\delta} + \ldots + \frac{1}{\left[\frac{1}{\delta}\right]\delta}\right) + \log t\right] \\
&= O\left(\log t \cdot \log\log\log t + \log t \cdot \log\frac{1}{\delta}\right) \\
&= O(\log t \cdot \log\log\log t).
\end{aligned}$$

Wegen

$$\log\zeta\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\log\log t} + it\right) = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}+\frac{1}{\log\log t}} \frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma + it)\, d\sigma + O(1)$$

gilt aber für $\sigma = \frac{1}{2} + \frac{1}{\log\log t}$ auch

$$\log\zeta(s) = O(\log t \cdot \log\log\log t).$$

Andererseits gilt für $\sigma = 1$ nach dem Littlewoodschen Satze (vgl. Gleichung (2) unten)

$$\log\zeta(s) = O(\log\log\log t).$$

Die Hilfsfunktion

$$\frac{\log\zeta(s)}{[\log(-is)]^{2(1-s)} \log\log\log(-is)}$$

ist also für hinreichend große t_0 auf dem Rande des Gebietes $\frac{1}{2} + \frac{1}{\log\log t} \leqq \sigma \leqq 1$, $t > t_0$, beschränkt. Da sie weiter im Innern dieses Gebietes regulär bleibt und jedenfalls nicht schneller als eine endliche

[3]) Vgl. die vorstehende Arbeit des Herrn Landau.

tenz von t wächst, ist sie nach dem bekannten Phragmén-Lindelöfschen tze auch dort beschränkt. Hieraus folgert man aber durch eine einfache echnung

$$\log\zeta(s) = O\left[(\log t)^{2(1-\sigma)} \log\log\log t\right]$$

ichmäßig für $\frac{1}{2} + \frac{1}{\log\log t} \leqq \sigma \leqq 1, \quad t > 0.$

Der mehrfach erwähnte Littlewoodsche Satz besagt nun

$$\log\zeta(s) = O\left[\left(\frac{\log t \log\log t}{\log\log\log t}\right)^{2(1-\sigma)} \log\log\log t\right]$$

ichmäßig in demselben Gebiete, so daß in der Tat (1) für jedes $\sigma < 1$ schärferes Resultat ergibt.

Mörby, Stocksund, den 20. Juli 1919.

(Eingegangen am 24. Juli 1919.)

Zur Theorie der divergenten Reihen.

Von

Oskar Perron in Heidelberg.

In seinen „Leçons sur les séries divergentes“ (Paris 1901) hat Borel die Summe einer divergenten Reihe durch die Formel definiert:

$$u_0 + u_1 + u_2 + \ldots = \lim_{t=\infty} e^{-t} s(t), \tag{1}$$

sofern der Grenzwert existiert; dabei ist

$$s(t) = u_0 + \frac{u_0+u_1}{1!}t + \frac{u_0+u_1+u_2}{2!}t^2 + \cdots.$$

Setzt man

$$u(t) = u_0 + \frac{u_1}{1!}t + \frac{u_2}{2!}t^2 + \cdots,$$

so ist $s'(t) - s(t) = u'(t)$, und durch Integration dieser linearen Differentialgleichung erhält man:

$$s(t) = e^t\left[u_0 + \int_0^t e^{-t} u'(t)\,dt\right].$$

Die Formel (1) ist daher gleichbedeutend mit der folgenden:

$$u_0 + u_1 + u_2 + \cdots = u_0 + \int_0^\infty e^{-t} u'(t)\,dt.$$

Hieraus hat Borel durch eine partielle Integration die weitere Formel gewonnen:

$$u_0 + u_1 + u_2 + \cdots = \int_0^\infty e^{-t} u(t)\,dt. \tag{2}$$

Diese Borelsche Herleitung der Formel (2) aus (1) ist von Hardy mit Recht beanstandet worden[1]), da sie auf der stillschweigend gemachten Annahme

[1]) G. H. Hardy, Researches in the theory of divergent series and divergent integrals. The quarterly journal of pure and applied mathematics, **35** (1903) S. 22–66.

$$\lim_{t=\infty} e^{-t} u(t) = 0$$

ruht. Hardy erklärt kategorisch: „Aus (1) folgt nicht (2)." Er unter-3t es aber wohlweislich, diese Behauptung durch ein Gegenbeispiel zu itzen. Borel ist später auf die Sache meines Wissens nie zurück-kommen, scheint also mit Hardy einverstanden zu sein.

Ich werde nun zeigen, daß die Hardysche Behauptung nicht zutrifft; i Borel ist also nur der Beweis falsch, die Behauptung aber zufällig htig, und die unbewiesene Annahme (3) ist tatsächlich beweisbar. Es t nämlich der Satz:

Wenn der Grenzwert (1) *existiert, so existiert auch das Integral* (2) *d ist gleich dem Grenzwert* (1).

Der Beweis beruht auf dem auch bei Hardy vorkommenden, aber f sehr umständliche Weise bewiesenen Hilfssatz: *Es ist stets*

$$\lim_{t=\infty} \omega(t) = \lim_{t=\infty} [\omega(t) + \omega'(t)],$$

fern der rechts stehende Grenzwert existiert.

Offenbar genügt es, den Hilfssatz für reellwertige Funktionen $\omega(t)$ beweisen, da man sonst nur nötig hat, den reellen und imaginären il gesondert zu betrachten. Setzt man dann

$$\omega(t) + \omega'(t) = \varphi(t),$$

folgt durch Integration dieser linearen Differentialgleichung:

$$\omega(t) = e^{-t} \int e^{t} \varphi(t)\, dt = \frac{\int e^{t} \varphi(t)\, dt}{e^{t}}.$$

n den Grenzwert dieses Bruches für $t \to \infty$ zu berechnen, kann man, der Nenner gegen ∞ strebt, nach einem Satz von Stolz die bekannte ethode anwenden, Zähler und Nenner zu differenzieren[2]). So erhält man:

$$\lim_{t=\infty} \omega(t) = \lim_{t=\infty} \frac{e^{t} \varphi(t)}{e^{t}} = \lim_{t=\infty} [\omega(t) + \omega'(t)],$$

il ja der rechts stehende Grenzwert nach Voraussetzung existiert. Der lfssatz ist damit bewiesen.

Wir wenden jetzt den Hilfssatz an auf die Funktion

$$\omega(t) = \int_0^t e^{-t} u(t)\, dt.$$

nn ist identisch

$$\omega(t) + \omega'(t) = e^{-t} s(t).$$

[2]) Über das Verhalten des Zählers braucht dabei nichts weiter bekannt zu sein. l. O. Stolz, Grundzüge der Differential- und Integralrechnung, Leipzig 1893. S. 77.

Denn beide Seiten dieser Gleichung haben die Ableitung $e^{-t}u'(t)$ und haben außerdem für $t=0$ den gemeinsamen Wert u_0.

Da aber die rechte Seite von (4) nach Voraussetzung für $t\to\infty$ einem Grenzwert b zustrebt, so ist nach dem Hilfssatz auch

$$\int_0^\infty e^{-t}u(t)\,dt = \lim_{t=\infty}\omega(t) = b. \quad \text{W. z. b. w.}$$

Nebenbei folgt dann aus (4) auch:

$$\lim_{t=\infty}\omega'(t) = 0,$$

und da $\omega'(t) = e^{-t}u(t)$ ist, so ist damit zugleich die Borelsche Annahme (3) als zutreffend nachgewiesen.

Der Satz läßt sich nicht umkehren, wie das Beispiel

$$u(t) = e^t\cos(t^2)$$

zeigt, bei welchem zwar das Integral (2):

$$\int_0^\infty e^{-t}u(t)\,dt = \int_0^\infty \cos(t^2)\,dt$$

existiert, nicht aber der Grenzwert (1); denn es ist ja

$$e^{-t}s(t) = \omega(t) + \omega'(t) = \int_0^t \cos(t^2)\,dt + \cos(t^2)$$

und hier hat die rechte Seite für $t\to\infty$ keinen Grenzwert.

Die Definitionsformel (2) ist somit nicht nur eine richtige Umformung der ursprünglichen Definitionsformel (1), sondern eine den Geltungsbereich ausdehnende Erweiterung.

(Eingegangen am 26. Juli 1919.)

Über nichthomogene lineare Differentialgleichungen.

Von

Oskar Perron in Heidelberg.

In der vorausgehenden Note über divergente Reihen habe ich einen eweis und eine Anwendung des folgenden Satzes gegeben:

Wenn $\omega(x)$ der linearen Differentialgleichung genügt:

$$\omega'(x) + \omega(x) = \varphi(x),$$

d wenn $\varphi(x)$ für $x \to \infty$ einem endlichen Grenzwert zustrebt, so strebt (x) demselben Grenzwert zu.

Dieser Satz läßt sich auf lineare Differentialgleichungen beliebiger rdnung ausdehnen, was mir nicht ohne Interesse zu sein scheint.

§ 1.

Satz 1. *Die Koeffizienten a_ν der linearen Differentialgleichung*

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_n y = \varphi(x)$$

en konstant, und die Wurzeln der Gleichung

$$\varrho^n + a_1 \varrho^{n-1} + \cdots + a_n = 0$$

en sämtlich reell und von Null verschieden (so daß auch alle a_ν reell nd, und $a_n \neq 0$ ist). Wenn dann die Funktion $\varphi(x)$ für $x \geqq x_0$ stetig und für $x \to \infty$ einem endlichen Grenzwert b zustrebt, so hat die fferentialgleichung ein Integral y, welches für $x \to \infty$ dem Grenzwert $\frac{b}{a_n}$ strebt, während die Ableitungen $y', y'', \ldots, y^{(n)}$ gegen Null konvergieren.

Sind die n Wurzeln der obigen Gleichung alle negativ, so hat sogar les Integral y diese Eigenschaft.

Beweis. Offenbar genügt es, den Satz für reelle $\varphi(x)$ zu beweisen, il man andernfalls den reellen und imaginären Teil der Gleichung (1) ondert betrachten kann. Sind $\varrho_1, \ldots, \varrho_n$ die Wurzeln der Gleichung (2), läßt sich die Differentialgleichung (1) ersetzen durch das System

$$(3)\qquad \begin{cases} y_1' - \varrho_1 y_1 = y_2, \\ y_2' - \varrho_2 y_2 = y_3, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_{n-1}' - \varrho_{n-1} y_{n-1} = y_n, \\ y_n' - \varrho_n y_n = \varphi(x), \end{cases}$$

und zwar ist dann $y = y_1$.

Aus der letzten der Gleichungen (3) folgt:

$$(4)\qquad y_n = e^{\varrho_n x}\int e^{-\varrho_n x}\varphi(x)\,dx = \frac{\int e^{-\varrho_n x}\varphi(x)\,dx}{e^{-\varrho_n x}}.$$

Wenn nun $\varrho_n < 0$, so wächst der Nenner in (4) für $x \to \infty$ über alle Grenzen, so daß man den Grenzwert des Quotienten berechnen kann, indem man Zähler und Nenner differenziert (Satz von Stolz; vgl. das Zitat in der vorausgehenden Arbeit). So erhält man:

$$(5)\qquad \lim_{x=\infty} y_n = \lim_{x=\infty} \frac{\int e^{-\varrho_n x}\varphi(x)\,dx}{e^{-\varrho_n x}} = \lim_{x=\infty} \frac{e^{-\varrho_n x}\varphi(x)}{-\varrho_n e^{-\varrho_n x}} = -\frac{b}{\varrho_n}.$$

Wenn aber $\varrho_n > 0$, so ist bei dem Integral in (4) die untere Grenze ∞ zulässig. Dann haben Zähler und Nenner für $x \to \infty$ beide den Grenzwert Null, so daß man den Grenzwert des Quotienten ebenso berechnen kann wie oben.

Die Formel (5) gilt also in allen Fällen, und aus ihr folgt weiter mit Hilfe der letzten der Gleichungen (3):

$$(6)\qquad \lim_{x=\infty} y_n' = 0.$$

Aus der vorletzten der Gleichungen (3) ergibt sich nun, nachdem der Grenzwert der rechten Seite aus (5) bereits bekannt ist, ebenso:

$$(7)\qquad \lim_{x=\infty} y_{n-1} = \frac{b}{\varrho_n \varrho_{n-1}}, \quad \lim_{x=\infty} y_{n-1}' = 0.$$

Weiter erhält man durch Differentiation der vorletzten Gleichung (3):

$$y_{n-1}'' - \varrho_{n-1} y_{n-1}' = y_n',$$

und hieraus wegen (6) und (7):

$$\lim_{x=\infty} y_{n-1}'' = 0.$$

Nunmehr ergibt sich auf die gleiche Weise aus der drittletzten der Gleichungen (3), sowie aus den durch ein- und zweimalige Differentiation aus ihr hervorgehenden Gleichungen:

$$\lim_{x=\infty} y_{n-2} = -\frac{b}{\varrho_n \varrho_{n-1} \varrho_{n-2}}, \quad \lim_{x=\infty} y_{n-2}' = 0, \quad \lim_{x=\infty} y_{n-2}'' = 0, \quad \lim_{x=\infty} y_{n-2}''' = 0$$

In dieser Weise kann man fortfahren, und erhält schließlich aus der sten der Gleichungen (3), sowie aus denen, die daraus durch ein-, vei-, ..., $(n-1)$-malige Differentiation hervorgehen:

$$\lim_{x=\infty} y_1 = (-1)^n \frac{b}{\varrho_n \varrho_{n-1} \dots \varrho_1} = \frac{b}{a_n},$$

$$\lim_{x=\infty} y_1' = 0, \quad \lim_{x=\infty} y_1'' = 0, \quad \dots, \quad \lim_{x=\infty} y_1^{(n)} = 0.$$

Damit ist die Existenz eines Integrals $y = y_1$ bewiesen, das die in atz 1 behauptete Eigenschaft hat. Von diesem partikulären Integral nterscheidet sich das allgemeine nur durch additive Glieder der Form $e^{\varrho_\nu x} x^\lambda$, und diese haben, wenn alle ϱ_ν negativ sind, den Grenzwert Null; enso ihre Ableitungen, womit Satz 1 vollständig bewiesen ist.

Der Satz gilt nicht mehr, wenn für die Wurzeln ϱ_ν auch imaginäre erte zugelassen werden. Beispielsweise hat die Gleichung

$$y'' + y = \frac{\cos x}{x}$$

s allgemeine Integral

$$y = \sin x \left(C_1 + \int_a^x \frac{\cos^2 x}{x} dx \right) - \cos x \left(C_2 + \int_a^x \frac{\sin 2x}{2x} dx \right);$$

her ist, obwohl die Funktion $\varphi(x) = \frac{\cos x}{x}$ für $x \to \infty$ dem Grenzwert ull zustrebt, doch für jedes Integral y:

$$\limsup_{x=\infty} y = \infty, \quad \liminf_{x=\infty} y = -\infty.$$

§ 2.

Der Satz 1 läßt sich mit gewissen Einschränkungen auf den Fall sdehnen, daß an Stelle der konstanten Koeffizienten a_ν Funktionen von x eten, die für $x \to \infty$ gegen endliche Grenzwerte konvergieren.

Satz 2. *Die Koeffizienten der Differentialgleichung*

$$y^{(n)} + f_1(x) y^{(n-1)} + \dots + f_n(x) y = \varphi(x)$$

ögen für $x \geqq x_0$ reell und stetig sein und den Bedingungen genügen:

$$\lim_{x=\infty} f_\nu(x) = a_\nu \qquad (\nu = 1, 2, \dots, n),$$

$$\lim_{x=\infty} \varphi(x) = b.$$

e Wurzeln der „charakteristischen Gleichung"

$$\varrho^n + a_1 \varrho^{n-1} + \dots + a_n = 0$$

en reell, ungleich Null, und voneinander verschieden. Dann

hat die Differentialgleichung ein Integral y, für welches die Beziehungen gelten:

$$\lim_{x=\infty} y = \frac{b}{a_n}, \quad \lim_{x=\infty} y' = 0, \quad \ldots, \quad \lim_{x=\infty} y^{(n)} = 0.$$

Sind die Wurzeln der charakteristischen Gleichung alle negativ, so hat jedes Integral diese Eigenschaft.

Beweis. Nach einem früher von mir bewiesenen Satz hat die homogene Differentialgleichung

$$y^{(n)} + f_1(x)\, y^{(n-1)} + \cdots + f_n(x)\, y = 0$$

ein Fundamentalsystem von Integralen $y_1, y_2, \ldots, y_n$, für welches

$$\lim_{x=\infty} \frac{y_\nu'}{y_\nu} = \varrho_\nu, \quad \lim_{x=\infty} \frac{y_\nu''}{y_\nu} = \varrho_\nu^2, \ldots, \lim_{x=\infty} \frac{y_\nu^{(n)}}{y_\nu} = \varrho_\nu^n \tag{8}$$

ist[1]). Ein Integral der inhomogenen Differentialgleichung des Satzes 2 hat dann bekanntlich die Form

$$y = \sum_{\nu=1}^{n} y_\nu u_\nu, \tag{9}$$

wobei die Funktionen u_ν dem folgenden Gleichungssystem genügen:

$$\left\{\begin{array}{l} \displaystyle\sum_{\nu=1}^{n} y_\nu u_\nu' = 0, \\ \displaystyle\sum_{\nu=1}^{n} y_\nu' u_\nu' = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \displaystyle\sum_{\nu=1}^{n} y_\nu^{(n-2)} u_\nu' = 0, \\ \displaystyle\sum_{\nu=1}^{n} y_\nu^{(n-1)} u_\nu' = \varphi(x). \end{array}\right. \tag{10}$$

Hieraus folgt dann mit Rücksicht auf (8), daß die Grenzwerte

$$\lim_{x=\infty} y_\nu u_\nu' = \gamma_\nu \tag{11}$$

existieren, und zwar ist

---

[1]) Satz 5 meiner Arbeit: Über lineare Differentialgleichungen, bei denen unabhängig Variable reell ist; erste Mitteilung. Journal für die reine und angewandte Mathematik, **142**, S. 254–270.

$$\begin{cases} \sum_{\nu=1}^{n} \gamma_\nu = 0, \\ \sum_{\nu=1}^{n} \varrho_\nu \gamma_\nu = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \sum_{\nu=1}^{n} \varrho_\nu^{n-2} \gamma_\nu = 0, \\ \sum_{\nu=1}^{n} \varrho_\nu^{n-1} \gamma_\nu = b; \end{cases}$$

der durch Auflösung nach γ_ν, wenn

$$\varrho^n + a_1 \varrho^{n-1} + \cdots + a_n = F(\varrho)$$

esetzt wird:

12) $$\gamma_\nu = \frac{b}{F'(\varrho_\nu)} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n).$$

Setzt man nun

13) $$\frac{y_\nu'}{y_\nu} = \varrho_\nu + \varepsilon_\nu(x), \qquad y_\nu u_\nu' = \gamma_\nu + \delta_\nu(x),$$

ist nach (8) und (11)

14) $$\lim_{x=\infty} \varepsilon_\nu(x) = 0, \qquad \lim_{x=\infty} \delta_\nu(x) = 0.$$

us (13) folgt:

15) $$y_\nu = e^{\varrho_\nu x + \int \varepsilon_\nu(x)\,dx},$$
$$u_\nu' = (\gamma_\nu + \delta_\nu(x))\, y_\nu^{-1} = (\gamma_\nu + \delta_\nu(x))\, e^{-\varrho_\nu x - \int \varepsilon_\nu(x)\,dx},$$

nd daher durch Integration:

$$u_\nu = \int (\gamma_\nu + \delta_\nu(x))\, e^{-\varrho_\nu x - \int \varepsilon_\nu(x)\,dx}\, dx.$$

chließlich ist also

16) $$y_\nu u_\nu = \frac{\int (\gamma_\nu + \delta_\nu(x))\, e^{-\varrho_\nu x - \int \varepsilon_\nu(x)\,dx}\, dx}{e^{-\varrho_\nu x - \int \varepsilon_\nu(x)\,dx}}.$$

Wenn $\varrho_\nu < 0$, so wächst der Nenner in (16) für $x \to \infty$ über alle renzen, und man erhält den Grenzwert des Bruches, indem man Zähler nd Nenner differenziert, und zwar ergibt sich:

17) $$\lim_{x=\infty} y_\nu u_\nu = \lim_{x=\infty} \frac{(\gamma_\nu + \delta_\nu(x))\, e^{-\varrho_\nu x - \int \varepsilon_\nu(x)\,dx}}{(-\varrho_\nu - \varepsilon_\nu(x))\, e^{-\varrho_\nu x - \int \varepsilon_\nu(x)\,dx}} = -\frac{\gamma_\nu}{\varrho_\nu} = -\frac{b}{\varrho_\nu F'(\varrho_\nu)}.$$

enn aber $\varrho_\nu > 0$, so ist bei dem Zählerintegral in (16) die untere

Grenze ∞ zulässig. Dann haben Zähler und Nenner für $x \to \infty$ den Grenzwert Null, und daher gilt wiederum die Formel (17). Daraus folgt dann weiter:

$$\lim_{x=\infty} y = \lim_{x=\infty} \sum_{\nu=1}^{n} y_\nu u_\nu = -\sum_{\nu=1}^{n} \frac{b}{\varrho_\nu F'(\varrho_\nu)} = \frac{b}{F(0)} = \frac{b}{a_n}. \tag{18}$$

Aus (9) und (10) erhält man durch sukzessive Differentiation:

$$y' = \sum_{\nu=1}^{n} (y_\nu' u_\nu + y_\nu u_\nu') = \sum_{\nu=1}^{n} y_\nu' u_\nu,$$

$$y'' = \sum_{\nu=1}^{n} (y_\nu'' u_\nu + y_\nu' u_\nu') = \sum_{\nu=1}^{n} y_\nu'' u_\nu,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$y^{(n-1)} = \sum_{\nu=1}^{n} (y_\nu^{(n-1)} u_\nu + y_\nu^{(n-2)} u_\nu') = \sum_{\nu=1}^{n} y_\nu^{(n-1)} u_\nu,$$

$$y^{(n)} = \sum_{\nu=1}^{n} (y_\nu^{(n)} u_\nu + y_\nu^{(n-1)} u_\nu') = \sum_{\nu=1}^{n} y_\nu^{(n)} u_\nu + \varphi(x).$$

Daher mit Rücksicht auf (8) und (17) für $\lambda = 1, 2, \ldots, n-1$:

$$\left\{ \begin{aligned} \lim_{x=\infty} y^{(\lambda)} &= \lim_{x=\infty} \sum_{\nu=1}^{n} y_\nu^{(\lambda)} u_\nu = \lim_{x=\infty} \sum_{\nu=1}^{n} \frac{y_\nu^{(\lambda)}}{y_\nu} y_\nu u_\nu \\ &= -\sum_{\nu=1}^{n} \varrho_\nu^{\lambda} \frac{b}{\varrho_\nu F'(\varrho_\nu)} = -b \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\varrho_\nu^{\lambda-1}}{F'(\varrho_\nu)} = 0, \end{aligned} \right. \tag{19}$$

und außerdem:

$$\left\{ \begin{aligned} \lim_{x=\infty} y^{(n)} &= \lim_{x=\infty} \Big(\sum_{\nu=1}^{n} \frac{y_\nu^{(n)}}{y_\nu} y_\nu u_\nu + \varphi(x) \Big) \\ &= -b \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\varrho_\nu^{n-1}}{F'(\varrho_\nu)} + b = 0. \end{aligned} \right. \tag{20}$$

Die Formeln (18), (19), (20) zeigen, daß es in der Tat ein Integral y von der in Satz 2 behaupteten Art gibt. Von diesem unterscheid. sich aber das allgemeine Integral nur durch additive Glieder der Form $c_\nu y_\nu$; wenn die Wurzeln ϱ_ν negativ sind, so konvergieren diese Zusatzglieder nach (15) für $x \to \infty$ gegen Null, und wegen (8) gilt dann das gleiche auch von ihren Ableitungen bis zur n-ten einschließlich. Damit ist Satz 2 vollständig bewiesen.

(Eingegangen am 26. Juli 1919.)

Beiträge zur Theorie der Toeplitzschen Formen.

(Erste Mitteilung.)

Von

G. Szegő in Budapest.

Inhalt.

Einleitung.

I. Teil. Über verschiedene Mittelwerte.

1. Das arithmetische und geometrische Mittel.
2. Eine Verallgemeinerung des geometrischen Mittels.

II. Teil. Eine Minimum-Aufgabe.

3. Formulierung des Problems.
4. Über die Minimumwerte μ_n.
5. Konvergenz der Minimumwerte μ_n.

III. Teil. Über die Toeplitzschen Formen.

6. Toeplitzsche Formen und Toeplitzsche Determinanten.
7. Sätze über die Toeplitzschen Determinanten.
8. Ein Satz über die Eigenwerte der Toeplitzschen Formen.
9. Verallgemeinerungen.
10. Anwendungen.

IV. Teil. Über gewisse Orthogonalsysteme von Polynomen.

11. Definition.
12. Beziehungen zu der im II. Teil behandelten Minimum-Aufgabe.
13. Sätze über Wurzeln.
14. Konvergenzsätze.
15. Entwickelung nach den Polynomen $\varphi_n(z)$.

Beispiele.

Einleitung.

Der Zweck dieser Arbeit ist, im Rahmen einer einfachen Minimumgabe (§ 3), einige Sätze zu entwickeln, die geeignet sind, die Theorie Toeplitzschen Formen von *endlichvielen* Variablen näher zu be-

gründen. Unter Toeplitzschen Formen verstehe ich diejenigen Hermite-schen Formen, deren Matrix die Gestalt hat

$$\begin{pmatrix} c_0 & c_{-1} & c_{-2} & \cdots & c_{-n} \\ c_1 & c_0 & c_{-1} & \cdots & c_{-n+1} \\ c_2 & c_1 & c_0 & \cdots & c_{-n+2} \\ & & & \cdots & \cdot \\ c_n & c_{n-1} & c_{n-2} & \cdots & c_0 \end{pmatrix},$$

wo

$$c_{-n} = \bar{c}_n \quad [1] \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

ist[2]). Ich setze

$$c_n = a_n + i b_n \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots);$$

dann ist es besonders interessant, die Zahlen a_n und b_n als die Fourier-schen Konstanten einer reellen, (L) integrablen[3]) Funktion $f(\theta)$ aufzu-fassen; d. h. es sei

$$a_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\cos n\theta\, d\theta, \quad b_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\sin n\theta\, d\theta,$$

also

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\, e^{in\theta}\, d\theta \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

So gehört zu jeder Funktion $f(\theta)$ eine ganz bestimmte Schar von Toeplitz-schen Formen[4])

$$T_n(f; x_0, x_1, \ldots, x_n) = \sum_{p=0}^{n}\sum_{p=0}^{n} c_{p-q}\, x_p \bar{x}_q \quad (n = 0, 1, 2, .$$

deren jede ein Abschnitt der nachfolgenden ist.

---

[1]) $\bar{x}$ bezeichnet die zu x konjugiert komplexe Größe.

[2]) Ich unterscheide die Toeplitzschen Formen von den sog. L-Formen, deren Koeffizientenschema folgendes Aussehen hat:

$$(c_{p-q})_{-n}^{n}.$$

Diese Formen stehen natürlich in engstem Zusammenhange mit den Toeplitzschen Formen. Die Benennung „Toeplitzsche Form“ kommt bei E. Fischer (a. a. O. [5]) c) S. 254–256) vor.

[3]) D. h. im Lebesgueschen Sinne.

[4]) O. Toeplitz, a) Zur Transformation der Scharen bilinearer Formen von unendlichvielen Veränderlichen [Nachrichten der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, mathematisch-physikalische Klasse 1907, S. 110–115]; b) Zur Theorie der quadratischen Formen von unendlichvielen Variablen [ebenda 1910, S. 489–506]; c) Zur Theorie der quadratischen und bilinearen Formen von unendlichvielen Veränderlichen. I. Teil: Theorie der L-Formen [Mathematische Annalen, 70 (1911), S. 351–376]; d) Über die Fouriersche Entwickelung positiver Funktionen [Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, tomo 32 (2° Semestre 1911), S. 191–192].

Die Arbeiten von Toeplitz, Carathéodory und Fejér[5]) haben ekanntlich auf einen tiefgehenden Zusammenhang gewiesen, der zwischen em Wertevorrat dieser Formen und dem von $f(\theta)$ besteht. Nach gelissen Vorbereitungen, die im I. und II. Teil der vorliegenden Arbeit thalten sind, will ich im III. Teil diesen Zusammenhang noch näher äzisieren, indem ich die Eigenwerte obiger Formen betrachte und deren erteilung untersuche. Es ergibt sich der Satz (§ 8), daß sie für $\lim n = \infty$ m Durchschnitt" mit den äquidistanten Ordinaten von $f(\theta)$ übereinimmen[6]).

Bei der Abfassung des IV. Teiles[7]) hatte ich eine gewisse Analogie or Augen, die an vielen Punkten zwischen der Theorie der Toeplitzhen und der sog. *rekurrierenden* (Hankelschen) Formen[8]) besteht. nter rekurrierenden Formen verstehe ich diejenigen quadratischen Formen, eren Matrix die Gestalt hat

$$\begin{pmatrix} g_0 & g_1 & g_2 & \cdots & g_n \\ g_1 & g_2 & g_3 & \cdots & g_{n+1} \\ g_2 & g_3 & g_4 & \cdots & g_{n+2} \\ & \cdot & & \cdots & \cdot \\ g_n & g_{n+1} & g_{n+2} & \cdots & g_{2n} \end{pmatrix} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

iese Formen haben eine ebenfalls sehr ausgedehnte Literatur, die übrigens

---

[5]) Man vgl. außer den oben zitierten Arbeiten von Toeplitz: a) C. Carathéodory, ber den Variabilitätsbereich der Fourierschen Konstanten von positiven harmoischen Funktionen [Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, tomo 32 (2° Sehestre 1911), S. 193–217]; b) C. Carathéodory und L. Fejér, Über den Zusamenhang der Extremen von harmonischen Funktionen mit ihren Koeffizienten und ber den Picard-Landauschen Satz [ebenda S. 218–239]; c) E. Fischer, Über as Carathéodorysche Problem, Potenzreihen mit positivem reellen Teil betreffend benda, S. 240–256]; d) I. Schur, Über einen Satz von C. Carathéodory [Sitzungsberichte der Kgl. Preußischen Akademie der Wissenschaften 1912, S. 4–15];) G. Frobenius, Ableitung eines Satzes von Carathéodory aus einer Formel on Kronecker [ebenda S. 16–31]; f) F. Riesz, Über ein Problem des Herrn arathéodory [Journal für die reine und angewandte Mathematik, **146** (1915), . 83–87]; g) I. Schur, Über Potenzreihen, die im Innern des Einheitskreises beschränkt sind [ebenda **147** (1917), S. 205–232 und **148** (1918), S. 122–145]. Man gl. insbesondere § 8; h) O. Szász, Über harmonische Funktionen und L-Formen Mathematische Zeitschrift, **1** (1918), S. 140–162].

[6]) Dieses Resultat ist in meiner ungarischen Arbeit enthalten: A Toeplitzle formákról [Mathematikai és természettudományi értesitő, **35** (1917), S. 185–222] . 203.

[7]) Erscheint in einer zweiten Mitteilung.

[8]) G. Frobenius, Über das Trägheitsgesetz der quadratischen Formen [Journal ir die reine und angewandte Mathematik, **114** (1895), S. 187–230] § 8.

viel älter ist, als die der Toeplitzschen Formen. Nun besteht, wie gesagt, zwischen den beiden Theorien eine gewisse Parallelität, die besonders scharf hervortritt, wenn die Konstanten g_n als die Stieltjesschen Momente einer im reellen Intervalle (α, β) definierten reellen Funktion $p(t)$ aufgefaßt werden, d. h.

$$g_n = \int_\alpha^\beta p(t) t^n dt \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Die Idee dieser Analogie ist nach beiden Richtungen zu verwerten. Anwendungen auf die Theorie der rekurrierenden Formen lasse ich hier beiseite[9]); ich befasse mich hier nur mit der Übertragung eines, mit den rekurrierenden Formen eng zusammenhängenden Begriffes auf die Theorie der Toeplitzschen Formen.

Es sei $p(t)$ eine für $\alpha \leqq t \leqq \beta$ definierte nichtnegative, (L) integrable Funktion und

$$\int_\alpha^\beta p(t) dt > 0.$$

Ich betrachte das System

$$\sqrt{p(t)},\ \sqrt{p(t)}\, t,\ \ldots,\ \sqrt{p(t)}\, t^n,\ \ldots^{10})$$

und bilde daraus nach dem Verfahren von E. Schmidt durch Orthogonalisierung das System

$$\sqrt{p(t)}\, P_0(t),\ \sqrt{p(t)}\, P_1(t),\ \ldots,\ \sqrt{p(t)}\, P_n(t),\ \ldots$$

mit folgenden Eigenschaften:

a) $P_n(t)$ ist ein Polynom n-ten Grades.

b) Der Koeffizient von t^n in $P_n(t)$ ist positiv.

c) $\int_\alpha^\beta p(t) P_m(t) P_n(t) dt = \varepsilon_{mn}$[11]) $\qquad (m, n = 0, 1, 2, \ldots)$

Ist z. B. $p(t) = 1$, α und β endlich, dann ist $P_n(t)$ (abgesehen von einem konstanten Faktor und von einer linearen Transformation der Variablen) gleich dem n-ten Legendreschen Polynome.

Die Polynome $P_n(t)$ spielen bekanntlich eine wichtige Rolle in der Theorie der Stieltjesschen Kettenbrüche[12]). Dort zeigt sich auch die

[9]) Eine diesbezügliche Arbeit von mir wurde am 18. III. 1918 der ungarischen Akademie der Wissenschaften vorgelegt.

[10]) Alle Quadratwurzeln sind positiv (nichtnegativ) zu nehmen.

[11]) ε_{mn} ist gleich 0 oder 1, je nachdem $m \neq n$ oder $m = n$ ist.

[12]) S. O. Perron, Die Lehre von den Kettenbrüchen, Leipzig und Berlin (B. G. Teubner), 1913, S. 379.

time Beziehung, in welcher sie zu den rekurrierenden Formen stehen. re verschiedenen interessanten Eigenschaften will ich hier nicht aus- nandersetzen. Ich bemerke nur, daß die meisten wohlbekannten Polynom- pen (die Polynome von Legendre, Laguerre, Jacobi und Hermite) s spezielle Fälle in dieser allgemeinen Klasse enthalten sind.

Die Eigenschaften dieser Polynome haben mehrere Autoren unter- cht. Um so auffallender ist es, daß in der Theorie der Toeplitzschen rmen die entsprechenden Polynome meines Wissens bisher nicht be- ndelt worden sind[13]). Diese Polynome definiere ich folgendermaßen:

Es sei $f(\theta)$ eine für $0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ definierte nichtnegative, (L) inte- able Funktion und

$$\int_0^{2\pi} f(\theta)\, d\theta > 0.$$

h betrachte das System

$$\sqrt{f(\theta)}, \sqrt{f(\theta)}\, z, \ldots, \sqrt{f(\theta)}\, z^n, \ldots \qquad (z = e^{i\theta})$$

d bilde daraus nach dem Verfahren von E. Schmidt durch Ortho- nalisierung das System

$$\sqrt{f(\theta)}\, \varphi_0(z), \sqrt{f(\theta)}\, \varphi_1(z), \ldots, \sqrt{f(\theta)}\, \varphi_n(z), \ldots \qquad (z = e^{i\theta})$$

t folgenden Eigenschaften:

a) $\varphi_n(z)$ ist ein Polynom n-ten Grades.

b) Der Koeffizient von z^n in $\varphi_n(z)$ ist positiv.

c) $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\, \varphi_m(z)\, \overline{\varphi_n(z)}\, d\theta = \varepsilon_{mn} \quad (z = e^{i\theta};\ m, n = 0, 1, 2, \ldots).$

; z. B. $f(\theta) = 1$, so ist $\varphi_n(z) = z^n$.

Die so definierten Polynome $\varphi_n(z)$ hängen eng mit den zu $f(\theta)$ ge- rigen Toeplitzschen Formen zusammen und haben in mehreren Punkten nliche Eigenschaften, wie die Polynome $P_n(t)$. Im IV. Teil beweise unter anderem den Satz (§ 14):

Es sei $f(\theta)$ positiv und $\log f(\theta)$ (L) integrabel; dann existiert

$$\lim_{n=\infty} \frac{\varphi_n(z)}{z^n}$$

$|z| > 1$ und stellt dort eine reguläre Funktion dar.

---

[13]) Man vgl. jedoch a. a. O. [5]) d) und e), wo ähnliche Polynome eine wichtige le spielen.

Ferner (§ 15):

Jede für $|z| \leqq 1$ regulär-analytische Funktion $F(z)$ gestattet eine Entwicklung nach den Polynomen $\varphi_n(z)$

$$F(z) = c_0 \varphi_0(z) + c_1 \varphi_1(z) + \ldots + c_n \varphi_n(z) + \ldots,$$

deren Koeffizienten c_n sich auf die Fouriersche Weise ergeben:

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) F(z) \overline{\varphi_n(z)}\, d\theta \quad (z = e^{i\Theta};\ n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Diese Entwicklung konvergiert für $|z| < R$, wenn $R > 1$ den Radius des größten Kreises bezeichnet, welcher keinen singulären Punkt von $F(z)$ enthält und stellt dort $F(z)$ dar. Sie divergiert ferner für $|z| > R$. Man hat übrigens

$$\limsup_{n=\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = \frac{1}{R}.$$

Es besteht demnach eine volle Analogie zu den Potenzreihen.

I. Teil.

Über verschiedene Mittelwerte.

Um den Gang der späteren Untersuchungen nicht unterbrechen zu müssen und zwecks Einheitlichkeit der Darstellung, schicke ich hier einige Definitionen und Hilfssätze voraus, die im folgenden mehrmals Anwendung finden.

§ 1.

Das arithmetische und geometrische Mittel.

1. Es sei $f(\theta)$ im Intervalle $(0, 2\pi)$ nichtnegativ und (L) integrabel. Ich bezeichne

$$A[f(\cdot)] = A(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta)\, d\theta$$

als das „*arithmetische Mittel*" von $f(\theta)$; das ist eine ganz bestimmte nichtnegative Zahl. Ist $0 \leqq m \leqq f(\theta) \leqq M$, so hat man

$$m \leqq A(f) \leqq M.$$

Ich definiere ferner das „*geometrische Mittel*" von $f(\theta)$ auf folgende Weise. Es sei $f(\theta)$ nichtnegativ und $f^\varkappa(\theta)$ (L) integrabel, wo $\varkappa$ positiv ist. Ist $f(\theta) \geqq m > 0$, so setze ich

$$G[f(\cdot)] = G(f) = e^{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log f(\Theta)\, d\Theta}$$

as ist eine ganz bestimmte positive Zahl, da ja

$$\log x \leqq x - 1 \qquad (x > 0),$$

so

$$\log m \leqq \log f(\theta) \leqq \frac{f^{\varkappa}(\theta) - 1}{\varkappa} \qquad (0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$$

t. Existiert aber eine solche Zahl m nicht, so unterscheide ich zwei älle. Ist das Lebesguesche Maß der Menge $E\,[f(\theta) = 0]$[14]) positiv, setze ich $G(f) = 0$. Ist es gleich 0, so kann ich zunächst voraus-tzen, daß $f(\theta)$ überall positiv ist. Das Integral

$$\int_{f(\theta) \geqq 1} \log f(\theta)\, d\theta$$

t nun immer endlich, weil

$$0 \leqq \int_{f(\theta) \geqq 1} \log f(\theta)\, d\theta \leqq \int_{f(\theta) \geqq 1} \frac{f^{\varkappa}(\theta) - 1}{\varkappa}\, d\theta \leqq \frac{1}{\varkappa} \int_0^{2\pi} f^{\varkappa}(\theta)\, d\theta$$

t. Das Integral

$$\int_{f(\theta) < 1} \log f(\theta)\, d\theta$$

ann entweder endlich oder nicht endlich (d. h. $-\infty$) sein. Ist es end-ch, so bleibt die obige Formel für $G(f)$ in Gültigkeit; ist es nicht dlich (d. h. $-\infty$), so setze ich $G(f) = 0$[15]).

So ist $G(f)$ als eine ganz bestimmte nichtnegative Zahl definiert. h bezeichne sie als das geometrische Mittel von $f(\theta)$.

2. Ich stelle hier einige Sätze für $G(f)$ zusammen, die, falls $f(\theta)$ sitiv und stetig ist, wohlbekannt sind.

Satz I. *Es sei* $0 \leqq m \leqq f(\theta) \leqq M$ *und* $f(\theta)\,(L)$ *integrabel. Dann t*

)
$$m \leqq G(f) \leqq M.$$

ies folgt unmittelbar aus der Definition. Zum Beispiel

$$G(1) = 1.$$

Satz II. *Es seien* $f(\theta)$, $\varphi(\theta)$ *nichtnegativ und* (L) *integrabel. ann ist*

2)
$$G(f)\, G(\varphi) = G(f\varphi).$$

---

[14]) Ich bezeichne dies mit mes $E\,[f(\theta) = 0]$.

[15]) $G(f)$ ist also dann und nur dann positiv, wenn (mit Ausnahme einer Menge) $f(\theta)$ positiv und $\log f(\theta)\,(L)$ integrabel ist.

Diese Gleichung ist trivial, wenn $f(\theta)$, $\varphi(\theta)$ (mit Ausnahme einer 0-Menge[16]) positiv und $\log f(\theta)$, $\log \varphi(\theta)$ (L) integrabel sind. Ist ferner $\operatorname{mes} E[f(\theta)=0]>0$, oder $\operatorname{mes} E[\varphi(\theta)=0]>0$, so ist sie auch klar. Es bleibt also nur der Fall zu betrachten, wo $f(\theta)$, $\varphi(\theta)$ positiv und die Funktionen $\log f(\theta)$, $\log \varphi(\theta)$ nicht beide (L) integrabel sind. Dann kann aber das Integral

$$\int_0^{2\pi} \log f(\theta)\,\varphi(\theta)\,d\theta$$

nicht endlich sein (es ist also gleich $-\infty$), da ja die Integrale

$$\int_{f(\Theta)\geqq 1} \log f(\theta)\,d\theta, \qquad \int_{\varphi(\Theta)\geqq 1} \log \varphi(\theta)\,d\theta$$

endlich sind. Also ist $G(f\varphi)=0$. Daraus folgt die Behauptung.

Satz III. *Es sei $f(\theta)$ nichtnegativ und (L) integrabel. Dann ist*

$$\lim_{\varepsilon=+0} G(f+\varepsilon)=G(f). \tag{3}$$

Es sei zunächst $\operatorname{mes} E[f(\theta)=0]=\alpha>0$. Für $\varepsilon>0$ hat man

$$\log G(f+\varepsilon)\leqq \frac{\alpha}{2\pi}\log\varepsilon+\frac{1}{2\pi}\int_{f(\Theta)\geqq 1-\varepsilon}\log[f(\theta)+\varepsilon]\,d\theta.$$

Nun gilt die Ungleichung

$$0<\log(x+\varepsilon)-\log x<\frac{\varepsilon}{x} \qquad (x>0,\ \varepsilon>0),$$

so daß

$$\log G(f+\varepsilon)\leqq \frac{\alpha}{2\pi}\log\varepsilon+\frac{1}{2\pi}\int_{f(\Theta)\geqq 1-\varepsilon}\log f(\theta)\,d\theta+\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon},$$

woraus

$$\lim_{\varepsilon=+0} G(f+\varepsilon)=0=G(f)$$

folgt.

Ich kann also voraussetzen, daß $\operatorname{mes} E[f(\theta)=0]=0$, oder auch, daß $f(\theta)$ überall positiv ist. Dann ist nach der obigen Ungleichung

$$\lim_{\varepsilon=+0}\int_{f(\Theta)\geqq 1}\log[f(\theta)+\varepsilon]\,d\theta=\int_{f(\Theta)\geqq 1}\log f(\theta)\,d\theta.$$

Es sei jetzt $\eta=\sqrt{\varepsilon}$ und $0<\varepsilon<\frac{1}{4}$. Es sind zwei Fälle möglich. Ist das Integral

$$\int_{f(\Theta)<1}\log f(\theta)\,d\theta=\lim_{\eta=+0}\int_{\eta\leqq f(\Theta)<1}\log f(\theta)\,d\theta$$

[16]) Unter 0-Menge verstehe ich eine Menge, deren Lebesguesches Maß gleich 0 ist.

ıdlich, d. h.

$$\lim_{\eta=+0} \int_{f(\Theta)<\eta} \log f(\theta)\, d\theta = 0,$$

hat man $(\eta + \varepsilon = \sqrt{\varepsilon} + \varepsilon < \frac{3}{4} < 1)$

$$0 \leqq \int_{f(\Theta)<1} \log[f(\theta)+\varepsilon]\, d\theta - \int_{f(\Theta)<1} \log f(\theta)\, d\theta$$

$$\leqq 2\pi \frac{\varepsilon}{\eta} + \int_{f(\Theta)<\eta} \log[f(\theta)+\varepsilon]\, d\theta - \int_{f(\Theta)<\eta} \log f(\theta)\, d\theta \leqq 2\pi\sqrt{\varepsilon} - \int_{f(\Theta)<\eta} \log f(\theta)\, d\theta,$$

oraus die Behauptung folgt. Ist aber dieses Integral nicht endlich, also $(f) = 0$, so ist

$$\int_{f(\Theta)<1} \log[f(\theta)+\varepsilon]\, d\theta \leqq \int_{\eta \leqq f(\Theta)<1} \log[f(\theta)+\varepsilon]\, d\theta \leqq \int_{\eta \leqq f(\Theta)<1} \log f(\theta)\, d\theta + 2\pi \frac{\varepsilon}{\eta}$$

$$\leqq \int_{\eta \leqq f(\Theta)<1} \log f(\theta)\, d\theta + 2\pi\sqrt{\varepsilon},$$

oraus $\lim_{\varepsilon=+0} G(f+\varepsilon) = 0$ folgt. Damit ist der Satz III bewiesen.

Satz IV. *Es sei $f(\theta)$ nichtnegativ und (L) integrabel, dann ist*

$$G(f) \leqq A(f)^{17}).$$

eser Satz folgt mittels Grenzübergangs unmittelbar aus der bekannten ıgleichung[18])

$$e^{\frac{m_1 \log x_1 + m_2 \log x_2 + \ldots + m_n \log x_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n}} \leqq \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \ldots + m_n x_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n}$$

$$(m_k > 0,\ x_k > 0;\ k = 1, 2, \ldots, n).$$

§ 2.

Eine Verallgemeinerung des geometrischen Mittels.

3. Es sei $\alpha = \varrho e^{i\varphi}$ eine beliebige komplexe Zahl im Innern des ıheitskreises, d. h. $\varrho < 1$. Es sei $f(\theta)$ nichtnegativ und $f^{\varkappa}(\theta)$ (L) inteıbel, wo $\varkappa$ positiv ist. Ich definiere den Mittelwert $G(\alpha; f)$ folgenderßen:

---

[17]) Dieser Satz rührt in seiner einfachsten Form von Cauchy her: Cours ıalyse de l'école royale polytechnique. Œuvres complètes, Paris (Gauthier-Villars), 7, II. Série, **3**, S. 375.

[18]) S. J. L. W. V. Jensen, Sur les fonctions convexes et les inégalités entre valeurs moyennes [Acta Mathematica, **30** (1906), S. 175–201] S. 184.

Ist $G(f)=0$, so setze ich $G(\alpha;f)=0$.

Ist $G(f)>0$, so setze ich

$$G(\alpha;f)=e^{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log f(\Theta)\frac{1-|\alpha|^2}{|1-\bar{\alpha}z|^2}d\Theta}=e^{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log f(\Theta)\frac{1-\varrho^2}{1-2\varrho\cos(\Theta-\varphi)+\varrho^2}d\Theta}$$

$$(z=e^{i\Theta}).$$

Man kann diesem Ausdruck auch eine andere Form geben. Ist nämlich $G(f)>0$, so ist $\log f(\theta)$ (L) integrabel; es existiert also die formelle Fourier-Entwicklung

$$\log f(\theta)\sim k_0+2\sum_{n=1}^{\infty}(k_n\cos n\theta+l_n\sin n\theta).$$

Ich setze

$$g(z)=\frac{k_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(k_n-il_n)z^n$$

und

$$D(z)=e^{g(z)}=\sum_{n=0}^{\infty}d_nz^n.$$

Dann ist

a) $D(z)$ regulär-analytisch für $|z|<1$.

b) $D(z)\neq 0$ für $|z|<1$.

c) $|D(z)|^2=e^{2\Re g(z)}=e^{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log f(x)\frac{1-r^2}{1-2r\cos(x-\Theta)+r^2}dx}=G(z;f)$

$(z=re^{i\Theta};\ r<1)$[19]

Folglich

$$G(\alpha;f)=|D(\alpha)|^2.$$

Man hat offenbar

$$G(0;f)=|D(0)|^2=e^{k_0}=G(f).$$

Es gelten ferner die Sätze:

Ist $0\leqq m\leqq f(\theta)\leqq M$ *und* $f(\theta)(L)$ *integrabel, so ist*

(1′) $$m\leqq G(\alpha;f)\leqq M.$$

Ferner

$$G(\alpha;1)=1.$$

Sind $f(\theta)$, $\varphi(\theta)$ *nichtnegativ und* (L) *integrabel, so ist*

(2′) $$G(\alpha;f)\,G(\alpha;\varphi)=G(\alpha;f\varphi).$$

---

[19]) Ich verstehe unter $\Re x$ den reellen Teil der komplexen Zahl x.

Ist $f(\theta)$ nichtnegativ und (L) integrabel, so ist

') $$\lim_{\varepsilon=+0} G(\alpha; f+\varepsilon) = G(\alpha; f).$$

Diese Sätze können ähnlich bewiesen werden, wie die entsprechenden tze für $G(f)$.

4. Es gilt nun der

Satz V. *Ist $f(\theta)$ nichtnegativ, (L) integrabel und $G(f) > 0$, so ist*

) $$|d_0|^2 + |d_1|^2 + \ldots + |d_n|^2 + \ldots \leqq A(f)$$ [20]).

·Man hat nämlich nach der Ungleichung (4)

$$|(re^{i\theta})|^2 = e^{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log f(x) \frac{1-r^2}{1-2r\cos(x-\theta)+r^2} dx} \leqq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x) \frac{1-r^2}{1-2r\cos(x-\theta)+r^2} dx,$$

o

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |D(re^{i\theta})|^2 d\theta \leqq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,dx = A(f),$$

h.

$$|d_0|^2 + |d_1|^2 r^2 + \ldots + |d_n|^2 r^{2n} \leqq A(f),$$

jedes $r < 1$ und für jedes n. Hieraus folgt

$$|d_0|^2 + |d_1|^2 + \ldots + |d_n|^2 \leqq A(f),$$

mit die Behauptung bewiesen ist.

5. Aus Satz V ergibt sich folgende Verallgemeinerung des Satzes IV:

Satz VI. *Ist $f(\theta)$ nichtnegativ und (L) integrabel, so wird*

') $$G(\alpha; f) \leqq \frac{A(f)}{1-|\alpha|^2}.$$

s Gleichheitszeichen ist hier dann und nur dann gültig, wenn (mit snahme einer 0-Menge)

$$f(\theta) = \frac{c}{|1-\bar{\alpha}z|^2} \qquad (z = e^{i\theta})$$

$(c \geqq 0)$.

[20]) Diese Ungleichung genügt vollkommen für meine späteren Zwecke. Ich erne jedoch, daß hier unter den genannten Bedingungen immer das Gleichheitshen gilt; es bestehen allgemeiner die Gleichungen

$$d_0\bar{d}_\varkappa + d_1\bar{d}_{\varkappa+1} + \ldots + d_n\bar{d}_{\varkappa+n} + \ldots = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\, e^{i\varkappa\theta}\, d\theta \quad (\varkappa = 0, 1, 2, \ldots).$$

es System gibt eigentlich eine Parameterdarstellung für die Fourierschen Konten einer nichtnegativen, (L) integrablen Funktion $f(\theta)$, deren geometrisches el $G(f)$ positiv ist.

Insbesondere gilt in (C) *dann und nur dann das Gleichheitszeichen*[21] *wenn* (*mit Ausnahme einer* 0-*Menge*)

$$f(\theta) = c$$

ist $(c \geqq 0)$.

Ist $G(f) = 0$, so ist die Ungleichung (C') trivial. Ist $G(f) > 0$, s hat man

$$G(\alpha; f) = |d_0 + d_1 \alpha + \ldots + d_n \alpha^n + \ldots|^2,$$

also nach der Schwarzschen Ungleichung

$$G(\alpha; f) \leqq \sum_{n=0}^{\infty} |d_n|^2 \sum_{n=0}^{\infty} |\alpha|^{2n} = \frac{1}{1-|\alpha|^2} \sum_{n=0}^{\infty} |d_n|^2 \leqq \frac{A(f)}{1-|\alpha|^2}, \qquad \text{q. e. d}$$

Wenn in dieser Ungleichung das Gleichheitszeichen gilt, so sind zwe Fälle möglich. Entweder muß $G(\alpha; f) = G(f) = A(f) = 0$ sein, d. h (mit Ausnahme einer 0-Menge) $f(\theta) = 0$; oder aber $G(f) > 0$ und

$$\Big|\sum_{n=0}^{\infty} d_n \alpha^n\Big|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |d_n|^2 \sum_{n=0}^{\infty} |\alpha|^{2n},$$

also

$$d_n = \lambda \bar{\alpha}^n \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

d. h.

$$D(z) = \frac{\lambda}{1 - \bar{\alpha} z}$$

und

$$g(z) = \log \lambda - \log(1 - \bar{\alpha} z) = \log \lambda + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\bar{\alpha}^n}{n} z^n.$$

So folgt

$$k_n - i l_n = \frac{\bar{\alpha}^n}{n} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots),$$

d. h.

$$k_n = \frac{\varrho^n}{n} \cos n\varphi, \qquad l_n = \frac{\varrho^n}{n} \sin n\varphi \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

Es ist nun

$$-\log|1 - \bar{\alpha} z|^2 = -2\,\Re \log(1 - \bar{\alpha} z) = 2\,\Re \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\bar{\alpha} z)^n}{n} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varrho^n}{n} \cos n(\theta - \varphi)$$
$$(z = e^{i\theta}),$$

also (mit Ausnahme einer 0-Menge)[22]

$$\log f(\theta) + \log|1 - \bar{\alpha} z|^2 = \text{const.} \qquad (z = e^{i\theta})$$

q. e. d.

---

[21]) Dieser Teil des Satzes findet sich für positive und stetige Funktionen be G. Pólya [Archiv der Mathematik und Physik, 20 (1912), S. 272, 457-te Aufgabe].

[22]) Ist $g(\theta)(L)$ integrabel und $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(\theta) e^{in\theta} d\theta = 0$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, so ist (mit Ausnahme einer 0-Menge) $g(\theta) = \text{const.}$

6. Ich erwähne hier noch einen Satz, der in den meisten praktischen llen eine zur Berechnung von $G(\alpha; f)$ gut brauchbare Methode liefert.

Satz VII. *Es sei $F(z)$ regulär analytisch für $|z| \leqq 1$ und*

$$f(\theta) = |F(z)|^2 \qquad (z = e^{i\theta});$$

setze

$$F^*(z) = F(z),$$

nn $F(z)$ für $|z| < 1$ nicht verschwindet; es sei ferner

$$F^*(z) = F(z)\frac{1-\bar{z}_1 z}{z-z_1}\,\frac{1-\bar{z}_2 z}{z-z_2}\cdots\frac{1-\bar{z}_m z}{z-z_m},$$

nn die Wurzeln von $F(z)$ innerhalb des Einheitskreises (mit ihrer ultiplizität gezählt) $z_1, z_2, \ldots, z_m$ sind. Dann ist

a) *$F^*(z)$ regulär-analytisch für $|z| < 1$.*
b) *$F^*(z) \neq 0$ für $|z| < 1$.*
c) *$f(\theta) = |F(z)|^2 = |F^*(z)|^2$ $(z = e^{i\theta})$.*
d) *$G(\alpha; f) = |F^*(\alpha)|^2$* [23]).

a) und b) sind klar: c) folgt aus der Gleichung

$$\left|\frac{1-\bar{z}_0 z}{z-z_0}\right| = 1 \qquad (|z| = 1;\ |z_0| \neq 1).$$

läßt sich auf folgende Weise beweisen. Die Funktion

$$G(z) = \log F^*(z)$$

für $|z| < 1$ regulär; sie hat ferner am Rande des Einheitskreises nur rithmische Singularitäten in endlicher Anzahl. Also ist mit Ausnahme endlich vielen Stellen θ

$$\log f(\theta) = 2\,\Re \log F^*(z) = 2\,\Re G(z) \qquad (z = e^{i\theta}),$$

h. mit den vorigen Bezeichnungen $g(z) = ic + G(z)$ und also $z) = e^{ic}F^*(z)$, q. e. d.

II. Teil.

Eine Minimum-Aufgabe.

§ 3.

Formulierung des Problems.

7. Es sei $f(\theta)$ nichtnegativ und (L) integrabel $A(f) > 0$ [24]), α eine ebige komplexe Größe. Ich betrachte das Integral

[23]) Dies ist eine Verallgemeinerung des bekannten Jensenschen Satzes.
[24]) D. h. $f(\theta)$ ist positiv auf einer Menge vom positiven Maße.

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\,|P_n(z)|^2 d\theta \qquad (z=e^{i\theta})$$

wo $P_n(z)$ ein Polynom n-ten Grades bezeichnet, welches der Bedingung

$$P_n(\alpha)=1$$

genügt. Ich frage: Welches ist die *untere Grenze* $\mu_n(\alpha;f)$ dieses Integrals, während $P_n(z)$ mit der obigen Einschränkung die Gesamtheit der Polynome n-ten Grades durchläuft?

Ich setze

$$P_n(z)=x_0+x_1(z-\alpha)+\ldots+x_n(z-\alpha)^n,$$

dann ist $\mu_n(\alpha;f)$ die untere Grenze der Hermiteschen Form

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\,|x_0+x_1(z-\alpha)+\ldots+x_n(z-\alpha)^n|^2 d\theta \qquad (z=e^{i\theta})$$

für $x_0=1$. Die untere Grenze ist somit Minimum, das für ein einziges Wertsystem der Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ erreicht wird. Also

$$\mu_n(\alpha;f)=\operatorname{Min}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\,|P_n(z)|^2 d\theta \qquad (z=e^{i\theta})$$

während $P_n(\alpha)=1$ ist. Oder

$$\mu_n(\alpha;f)=\operatorname{Min}\frac{1}{2\pi}\frac{\int_0^{2\pi} f(\theta)\,|P_n(z)|^2\,d\theta}{|P_n(\alpha)|^2} \qquad (z=e^{i\theta})$$

während $P_n(\alpha)\neq 0$ ist.

8. Es sei jetzt $|\alpha|<1$. Zunächst ist es klar, daß man sich bei der Aufsuchung des Minimumwertes μ_n auf diejenigen Polynome $P_n(z)$ beschränken kann, die für $|z|<1$ nicht verschwinden. Also

$$\mu_n(\alpha;f)=\operatorname{Min}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\,|P_n(z)|^2 d\theta \qquad (z=e^{i\theta})$$

während $P_n(z)$ die Gesamtheit derjenigen Polynome n-ten Grades durchläuft, welche den Bedingungen genügen:

a) $P_n(z)\neq 0$ für $|z|<1$.

b) $P_n(\alpha)=1$.

Sei nämlich $|z_0|<1$ und $P_n(z_0)=0$. Ich bilde das Polynom $(\alpha\neq z_0)$

$$P_n^*(z)=P_n(z)\frac{1-\bar{z}_0 z}{z-z_0}\cdot\frac{\alpha-z_0}{1-\bar{z}_0\alpha}.$$

n hat man bekanntlich

$$\left|\frac{1-\bar{z}_0 z}{z-z_0}\right| = 1 \qquad (z = e^{i\theta})$$

d

$$\left|\frac{\alpha - z_0}{1-\bar{z}_0\alpha}\right| < 1,$$

o

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\,|P_n^*(z)|^2\,d\theta < \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\,|P_n(z)|^2\,d\theta \qquad (z = e^{i\theta}),$$

hrend $P_n^*(\alpha) = P_n(\alpha) = 1$ ist; hieraus folgt die Behauptung.

9. Es sei wieder $|\alpha| < 1$. Ich gebe der vorher gestellten Minimumfgabe eine andere Form. Zu diesem Zwecke zitiere ich den folgenden tz des Herrn Fejér:

Ist $\varphi_n(\theta)$ ein nichtnegatives trigonometrisches Polynom n-ter Ordnung, läßt es sich immer in der Form darstellen

$$\varphi_n(\theta) = |P_n(z)|^2 \qquad (z = e^{i\theta}),$$

$P_n(z)$ ein Polynom n-ten Grades bezeichnet[25]).

Diese Darstellung ist im allgemeinen auf mehrere Arten möglich. n kann aber leicht eine eindeutig bestimmte „Normaldarstellung" festen, indem man etwa die folgenden Einschränkungen macht:

a) $\varphi_n(\theta) \not\equiv 0$.

b) $P_n(z) \neq 0$ für $|z| < 1$.

c) $P_n(\alpha)$ ist reell und positiv[26]).

nn ist nach Satz VII

$$G(\alpha; \varphi_n) = |P_n(\alpha)|^2 = [P_n(\alpha)]^2.$$

raus folgt nun der

Satz VIII. *Es sei $f(\theta)$ nichtnegativ und (L) integrabel, $A(f) > 0$, < 1, n positiv und ganz. Dann ist*

$$\mu_n(\alpha; f) = \operatorname{Min} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\,\varphi_n(\theta)\,d\theta = \operatorname{Min} A(f\varphi_n),$$

---

[25]) L. Fejér, Über trigonometrische Polynome [Journal für die reine und angewandte Mathematik, **146** (1915), S. 53–82], S. 62.

[26]) Zu diesem Zwecke ist es am besten, die Formel

$$\left|\frac{1-\bar{z}_0 z}{z-z_0}\right| = 1 \qquad (|z| = 1;\ |z_0| \neq 1)$$

benutzen. Ist ferner $|R(z)|^2 = 1$ $(z = e^{i\Theta})$, wo $R(z)$ eine für $|z| \leqq 1$ reguläre von 0 verschiedene rationale Funktion bezeichnet, so ist nach Satz VII

$$G(\alpha; 1) = 1 = |R(\alpha)|^2 \qquad (|\alpha| < 1),$$

$R(\alpha) = \text{const}$.

wo $\varphi_n(\theta)$ ein nichtnegatives trigonometrisches Polynom n-ter Ordnung bezeichnet, für welches $G(\alpha; \varphi_n) = 1$ ist. Allgemeiner wird also

$$\mu_n(\alpha; f) = \text{Min } \frac{A(f\varphi_n)}{G(\alpha; \varphi_n)} \tag{7}$$

für alle nichtnegativen (nicht identisch verschwindenden) trigonometrischen Polynome n-ter Ordnung.

§ 4.

Über die Minimumwerte μ_n.

10. Eine unmittelbare Folge der Definition ist die Ungleichung

$$\mu_n(\alpha; f) \leqq A(f) \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Ferner

$$\mu_n(\alpha; f) \leqq \mu_{n-1}(\alpha; f) \qquad (n = 2, 3, 4, \ldots). \tag{8}$$

Die nichtnegativen Zahlen μ_n streben somit einem Grenzwerte zu, d. h. es gilt der

Satz IX. *Es sei $f(\theta)$ nichtnegativ und (L) integrabel, $A(f) > 0$. Die Folge der nichtnegativen Zahlen*

$$\mu_n(\alpha; f) \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

ist monoton abnehmend; es existiert also der Grenzwert

$$\lim_{n=\infty} \mu_n(\alpha; f) = \mu(\alpha; f) \leqq A(f).$$

11. Ich beweise jetzt den

Satz X. *Es sei $f(\theta) \leqq g(\theta)$ und $g(\theta)$ ebenfalls (L) integrabel. Dann ist*

$$\mu_n(\alpha; f) \leqq \mu_n(\alpha; g) \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Man hat nämlich

$$\mu_n(\alpha; f) \leqq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)|P_n(z)|^2 d\theta \leqq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(\theta)|P_n(z)|^2 d\theta \quad (z = e^{i\theta})$$

für jedes Polynom n-ten Grades $P_n(z)$ mit der Eigenschaft $P_n(\alpha) = 1$. Daraus folgt die Behauptung.

Aus Satz X ergibt sich die Ungleichung

$$\mu(\alpha; f) \leqq \mu(\alpha; g).$$

Ist z. B. $0 \leqq m \leqq f(\theta) \leqq M$, so hat man

$$m\,\mu_n(\alpha; 1) \leqq \mu_n(\alpha; f) \leqq M\,\mu_n(\alpha; 1) \quad (n = 1, 2, 3, \ldots) \tag{9}$$

und

$$m\,\mu(\alpha; 1) \leqq \mu(\alpha; f) \leqq M\,\mu(\alpha; 1). \tag{9'}$$

Die Größen $\mu_n(\alpha; 1)$, $\mu(\alpha; 1)$ lassen sich leicht berechnen. Man hat mlich

$$\int_0^{2\pi} |x_0 + x_1 z + \ldots + x_n z^n|^2 d\theta = |x_0|^2 + |x_1|^2 + \ldots + |x_n|^2 \quad (z = e^{i\theta}),$$

o

$$\mu_n(\alpha; 1) = \text{Min} \frac{|x_0|^2 + |x_1|^2 + \ldots + |x_n|^2}{|x_0 + x_1 \alpha + \ldots + x_n \alpha^n|^2}.$$

n ist nach der Schwarzschen Ungleichung

$$|x_0 + x_1 \alpha + \ldots + x_n \alpha^n|^2 \leqq \frac{1 - |\alpha|^{2n+2}}{1 - |\alpha|^2} (|x_0|^2 + |x_1|^2 + \ldots + |x_n|^2)$$

d für $x_k = \lambda \bar{\alpha}^k$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$ ist hier das Gleichheitszeichen gültig. so

$$\mu_n(\alpha; 1) = \frac{1 - |\alpha|^2}{1 - |\alpha|^{2n+2}} \quad [27] \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Hieraus folgt

$$\mu(\alpha, 1) = \begin{cases} 1 - |\alpha|^2 & \text{für } |\alpha| < 1, \\ 0 & \text{für } |\alpha| \geqq 1. \end{cases}$$

n hat also nach dem Vorigen

$$\frac{1 - |\alpha|^2}{1 - |\alpha|^{2n+2}} m \leqq \mu_n(\alpha; f) \leqq \frac{1 - |\alpha|^2}{1 - |\alpha|^{2n+2}} M \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

$$(1 - |\alpha|^2) m \leqq \mu(\alpha; f) \leqq (1 - |\alpha|^2) M \qquad (|\alpha| < 1),$$

$$\mu(\alpha; f) = 0 \qquad (|\alpha| \geqq 1).$$

12. Es sei $|\alpha| < 1$. Eine andere Abschätzung der Minimumwerte μ_n ält man auf folgende Weise. Es gilt nach (C') die Ungleichung

$$G(\alpha; f)\, G(\alpha; \varphi_n) = G(\alpha; f\varphi_n) \leqq \frac{A(f\varphi_n)}{1 - |\alpha|^2},$$

$$G(\alpha; f)(1 - |\alpha|^2) \leqq \frac{A(f\varphi_n)}{G(\alpha; \varphi_n)}$$

sämtliche nichtnegative trigonometrische Polynome n-ter Ordnung θ), welche nicht identisch verschwinden. Daraus folgt die Ungleichung

$$G(\alpha; f)(1 - |\alpha|^2) \leqq \mu_n(\alpha; f) \qquad (|\alpha| < 1;\ n = 1, 2, 3, \ldots)$$

so

$$G(\alpha; f)(1 - |\alpha|^2) \leqq \mu(\alpha; f) \qquad (|\alpha| < 1).$$

[27]) Ist $|\alpha| = 1$, so ist dieser Ausdruck durch $\frac{1}{n+1}$ zu ersetzen.

13. Ich beweise jetzt den

Satz XI. *Es sei $f(\theta)$ nichtnegativ und (L) integrabel, $A(f)>0$, $|\alpha|<1$, n eine feste positive Zahl. In der Ungleichung (11) steht dann und nur dann das Gleichheitszeichen, wenn (mit Ausnahme einer 0-Menge)*

$$f(\theta)=\frac{1}{|1-\bar{\alpha}z|^2}\,\frac{1}{\varphi(\theta)} \qquad (z=e^{i\theta}) \tag{12}$$

ist, wo $\varphi(\theta)$ ein positives trigonometrisches Polynom n-ter Ordnung bezeichnet.

Die Behauptung besteht aus zwei Teilen.

a) *Die Bedingung* (12) *ist notwendig.* Ist nämlich

$$\mu_n(\alpha;f)=G(\alpha;f)(1-|\alpha|^2),$$

so hat man

$$G(\alpha;f)(1-|\alpha|^2)=\frac{A(f\varphi_n^*)}{G(\alpha;\varphi_n^*)},$$

wo $\varphi_n^*(\theta)$ ein nicht identisch verschwindendes nichtnegatives trigonometrisches Polynom n-ter Ordnung bezeichnet. Also ist

$$G(\alpha;f\varphi_n^*)(1-|\alpha|^2)=A(f\varphi_n^*),$$

d. h. nach Satz VI (mit Ausnahme einer 0-Menge)

$$f(\theta)\varphi_n^*(\theta)=\frac{c}{|1-\bar{\alpha}z|^2} \qquad (z=e^{i\theta},\ c>0).$$

Daraus ergibt sich aber, daß $\varphi_n^*(\theta)$ nicht verschwinden darf, da in diesem Falle $f(\theta)$ aufhört (L) integrabel zu sein. Also ist $\varphi_n^*(\theta)>0$, woraus die Behauptung folgt.

b) *Die Bedingung* (12) *ist hinreichend.* Man hat laut Definition für jedes $\varphi_n(\theta)$

$$\mu_n(\alpha;f)\leqq\frac{A(f\varphi_n)}{G(\alpha;\varphi_n)},$$

also speziell

$$\mu_n(\alpha;f)\leqq\frac{A(f\varphi)}{G(\alpha;\varphi)}=\frac{A(f\varphi)}{G(\alpha;f\varphi)}G(\alpha;f).$$

Nun ist (mit Ausnahme einer 0-Menge)

$$f(\theta)\varphi(\theta)=\frac{1}{|1-\bar{\alpha}z|^2} \qquad (z=e^{i\theta}),$$

so daß nach Satz VI

$$\frac{A(f\varphi)}{G(\alpha;f\varphi)}=1-|\alpha|^2.$$

Daraus folgt

$$\mu_n(\alpha;f)\leqq G(\alpha;f)(1-|\alpha|^2)$$

und so nach (11)

$$\mu_n(\alpha;f)=G(\alpha;f)(1-|\alpha|^2),\quad \text{q. e. d.}$$

Ist z. B. $\varphi(\theta)$ ein positives trigonometrisches Polynom p-ter Ordnung

$$f(\theta) = \frac{1}{|1-\bar{\alpha}z|^2}\,\frac{1}{\varphi(\theta)} \qquad (|\alpha|<1;\ z=e^{i\Theta}),$$

ist

$$\mu_n(\alpha; f) = G(\alpha; f)(1-|\alpha|^2) \qquad (n \geqq p)$$

also

$$\mu(\alpha; f) = G(\alpha; f)(1-|\alpha|^2).$$

§ 5.

Konvergenz der Minimumwerte μ_n.

14. Das soeben erhaltene Resultat suggeriert die Vermutung, daß in Ungleichung (11′) immer das Gleichheitszeichen steht. Diese Vermutung wird in der Tat bestätigt durch den

Satz XII. *Es sei $f(\theta)$ nichtnegativ und (L) integrabel, $A(f)>0$, <1. Die Folge der Minimumwerte*

$$\mu_n(\alpha; f) = \operatorname{Min}\frac{A(f\varphi_n)}{G(\alpha;\varphi_n)} \qquad (n=1,2,3,\ldots)$$

bt monoton abnehmend nach dem Grenzwerte

$$\lim_{n=\infty}\mu_n(\alpha; f) = \mu(\alpha; f) = G(\alpha; f)(1-|\alpha|^2).$$

Man hat nämlich nach Satz VIII und IX

$$\mu(\alpha; f) \leqq \frac{A(f\varphi)}{G(\alpha;\varphi)},$$

$\varphi(\theta)$ ein beliebiges nichtnegatives trigonometrisches Polynom bezeichnet, nicht identisch verschwindet.

Es sei zunächst $0<m\leqq f(\theta)$. Ich behaupte, daß die Ungleichung (13) dann richtig bleibt, wenn $\varphi(\theta)$ eine beliebige (L) integrable Funktion eichnet, für welche

$$0<\mu\leqq\varphi(\theta)\leqq M$$

Ich bilde nämlich die Partialsummen

$$s_0(\theta),\ s_1(\theta),\ \ldots,\ s_n(\theta),\ \ldots$$

zu $\varphi(\theta)$ gehörigen Fourierschen Reihe, ferner die arithmetischen el derselben

$$\sigma_0(\theta),\ \sigma_1(\theta),\ \ldots,\ \sigma_n(\theta),\ \ldots.$$

n ist nach L. Fejér[28])

$$0<\mu\leqq\sigma_n(\theta)\leqq M \qquad (0\leqq\theta\leqq 2\pi;\ n=0,1,2,\ldots);$$

[28]) Untersuchungen über Fouriersche Reihen (Mathematische Annalen, 58), S. 51—69, S. 60.

ferner

$$\lim_{n=\infty} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} [\varphi(\theta) - \sigma_n(\theta)]^2 d\theta = 0 \text{ [29]},$$

also für genügend große n

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |\varphi(\theta) - \sigma_n(\theta)|\, d\theta < \varepsilon,$$

wo $\varepsilon > 0$ beliebig ist.

Nun ist $\sigma_n(\theta)$ ein positives trigonometrisches Polynom; also

$$\mu(\alpha; f) \leqq \frac{A(f\sigma_n)}{G(\alpha; \sigma_n)}.$$

Ich benutze jetzt die Ungleichungen

$$|e^{x_1} - e^{x_2}| \leqq e^a |x_1 - x_2| \qquad (x_1 \text{ und } x_2 \leqq a$$

$$|\log y_1 - \log y_2| \leqq \frac{|y_1 - y_2|}{b} \qquad (y_1 \text{ und } y_2 \geqq b > 0$$

man hat

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |\log\varphi(\theta) - \log\sigma_n(\theta)| \frac{1-|\alpha|^2}{|1-\bar{\alpha}z|^2} d\theta \leqq \frac{1+|\alpha|}{1-|\alpha|}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |\log\varphi(\theta) - \log\sigma_n(\theta)$$

$$\leqq \frac{1+|\alpha|}{1-|\alpha|}\frac{1}{\mu}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |\varphi(\theta) - \sigma_n(\theta)|\, d\theta < \frac{1+|\alpha|}{1-|\alpha|}\frac{\varepsilon}{\mu} \qquad (z = e^{i\theta}$$

also

$$|G(\alpha; \varphi) - G(\alpha; \sigma_n)| < \frac{1+|\alpha|}{1-|\alpha|}\frac{M}{\mu}\varepsilon = \varepsilon',$$

wo ε' mit ε nach 0 strebt.

Ich setze ferner $\eta = \sqrt{\varepsilon}$. Man hat

$$|A(f\varphi) - A(f\sigma_n)| \leqq \frac{1}{2\pi}\int_{\eta f(\theta)<1} f(\theta)|\varphi(\theta) - \sigma_n(\theta)|\, d\theta + \frac{1}{2\pi}\int_{\eta f(\theta)\geqq 1} f(\theta)|\varphi(\theta) - \sigma_n(\theta)|d$$

$$< \frac{\varepsilon}{\eta} + \frac{M}{\pi}\int_{\eta f(\theta)\geqq 1} f(\theta)\, d\theta = \varepsilon'',$$

wo ε'' mit ε nach 0 strebt.

Aus (13) folgt hiermit für genügend kleine ε

$$\mu(\alpha; f) < \frac{A(f\varphi) + \varepsilon''}{G(\alpha; \varphi) - \varepsilon'},$$

---

[29]) Dies folgt aus der Ungleichung

$$\left(\frac{a_0 + a_1 + \ldots + a_n}{n+1}\right)^2 \leqq \frac{a_0^2 + a_1^2 + \ldots + a_n^2}{n+1}.$$

$$\mu(\alpha; f) \leqq \frac{A(f\varphi)}{G(\alpha; \varphi)}, \quad \text{q. e. d.}$$

Daraus folgt sofort, daß (13) auch dann richtig bleibt, wenn die ere Grenze von $\varphi(\theta)$ gleich 0 ist, vorausgesetzt dabei, daß $G(\varphi) > 0$ In der Tat, hat man für jedes $\varepsilon > 0$

$$\mu(\alpha; f) \leqq \frac{A[f(\varphi+\varepsilon)]}{G(\alpha; \varphi+\varepsilon)} \leqq \frac{A(f\varphi)+\varepsilon A(f)}{G(\alpha; \varphi)},$$

aus die Behauptung folgt.

Ich setze jetzt in (13)

$$\varphi(\theta) = \frac{1-|\alpha|^2}{|1-\bar{\alpha}z|^2}\frac{1}{f(\theta)} \qquad (z = e^{i\Theta}).$$

ist

$$0 < \varphi(\theta) \leqq \frac{1+|\alpha|}{1-|\alpha|}\frac{1}{m}$$

$G(\varphi) < 0$, da $G(\varphi)G(f) = 1 - |\alpha|^2$ ist. Man hat ferner nach VI

$$G(\alpha; f\varphi) = \frac{A(f\varphi)}{1-|\alpha|^2},$$

$$\mu(\alpha; f) \leqq \frac{A(f\varphi)}{G(\alpha; f\varphi)} G(\alpha; f) = G(\alpha; f)(1-|\alpha|^2),$$

nach (11′)

$$\mu(\alpha; f) = G(\alpha; f)(1-|\alpha|^2), \quad \text{q. e. d.}$$

Es sei endlich $f(\theta)$ eine nichtnegative, (L) integrable Funktion und $f) > 0$. Dann ist nach Satz X für jedes $\varepsilon > 0$

$$\mu(\alpha; f) \leqq \mu(\alpha; f+\varepsilon) = G(\alpha; f+\varepsilon)(1-|\alpha|^2),$$

nach (3′)

$$\mu(\alpha; f) \leqq G(\alpha; f)(1-|\alpha|^2),$$

aus die Behauptung folgt.

Damit ist Satz XII völlig bewiesen.

III. Teil.

Über die Toeplitzschen Formen.

Wir haben bereits in § 3 den Zusammenhang bemerkt, der zwischen dort gestellten Minimum-Aufgabe und gewissen Hermiteschen Formen eht. In diesem III. Teil will ich die bisher erhaltenen Sätze in der hnten Beziehung deuten, bzw. auf die Untersuchung Toeplitzscher nen anwenden.

§ 6.

Toeplitzsche Formen und Toeplitzsche Determinanten.

15. Es sei $f(\theta)(L)$ integrabel und

$$a_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\cos n\theta\, d\theta, \quad b_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\sin n\theta\, d\theta$$

$$(n = 0, 1, 2, \ldots; b_0 = 0)$$

ich setze

$$c_{\pm n} = a_n \pm i b_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta) z^{\pm n} d\theta \qquad (z = e^{i\theta}; n = 0, 1, 2, \ldots)$$

dann ist

$$c_{-n} = \bar{c}_n \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

Ich bilde mit Toeplitz[30]) folgende Schar von Hermiteschen Formen

$$(\mathrm{T}) \quad T_n(f; x_0, x_1, \ldots, x_n) = \sum_{p=0}^{n}\sum_{q=0}^{n} c_{p-q} x_p \bar{x}_q$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\,|x_0 + x_1 z + \ldots + x_n z^n|^2\, d\theta$$

$$(z = e^{i\theta}; n = 0, 1, 2, \ldots)$$

Ich bezeichne diese Formen als die „*zu $f(\theta)$ gehörigen Toeplitzschen Formen*", ihre Determinanten

$$(\mathrm{D}) \quad D_n[f(\cdot)] = D_n(f) = \begin{vmatrix} c_0 & c_{-1} & c_{-2} & \ldots & c_{-n} \\ c_1 & c_0 & c_{-1} & \ldots & c_{-n+1} \\ c_2 & c_1 & c_0 & \ldots & c_{-n+2} \\ & \cdot & & \ldots & \cdot \\ c_n & c_{n-1} & c_{n-2} & \ldots & c_0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_0 & a_1 - ib_1 & a_2 - ib_2 & \ldots & a_n - ib_n \\ a_1 + ib_1 & a_0 & a_1 - ib_1 & \ldots & a_{n-1} - ib_n \\ a_2 + ib_2 & a_1 + ib_1 & a_0 & \ldots & a_{n-2} - ib_n \\ & \cdot & & \ldots & \cdot \\ a_n + ib_n & a_{n-1} + ib_{n-1} & a_{n-2} + ib_{n-2} & \ldots & a_0 \end{vmatrix}$$

$$(n = 0, 1, 2, \ldots)$$

als die „*zu $f(\theta)$ gehörigen Toeplitzschen Determinanten*".

---

[30]) A. a. O. [4]) b) S. 499.

16. Es sei jetzt (mit Ausnahme einer 0-Menge)

$$m \leqq f(\theta) \leqq M,$$

ner seien die Veränderlichen der Bedingung

$$|x_0|^2 + |x_1|^2 + \ldots + |x_n|^2 = 1$$

terworfen; dann ist

4) $$m \leqq T_n(f; x_0, x_1, \ldots, x_n) \leqq M \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

ja

$$T_n(1; x_0, x_1, \ldots, x_n) = |x_0|^2 + |x_1|^2 + \ldots + |x_n|^2 = 1$$

. Das Gleichheitszeichen in (14) ist dann und nur dann gültig, wenn it Ausnahme einer 0-Menge) $f(\theta) = \text{const.}$ ist.

Es sei ferner $f(\theta) \geqq 0$ und $A(f) > 0$. Dann ist

$$T_n(f; x_0, x_1, \ldots, x_n) > 0$$

r alle $x_0, x_1, \ldots, x_n$, die nicht sämtlich verschwinden; also ist

5) $$D_n(f) > 0 \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

17. Herr G. Pólya hat eine Darstellung der Toeplitzschen Determinanten gegeben[31]), die aus (D) mit Hilfe einer Formel von G. Landsberg[32]) cht gefolgert werden kann, nämlich

$$D_n(f) = \frac{2^{n^2-1}}{(n+1)!}\frac{1}{\pi^{n+1}}\underbrace{\int_0^{2\pi}\ldots\int_0^{2\pi}}_{n+1} f(\theta_0)f(\theta_1)\ldots f(\theta_n)\prod_{\mu,\nu}^{0,1,\ldots,n}\sin^2\frac{\theta_\mu-\theta_\nu}{2}\,d\theta_0 d\theta_1\ldots d\theta_n$$

$$(n = 0, 1, 2, \ldots).$$

araus folgt, wenn $g(\theta)$ nichtnegativ und (L) integrabel ist und $\leqq m \leqq f(\theta) \leqq M$ ist, daß

6) $$m^{n+1} \leqq D_n(f) \leqq M^{n+1} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

7) $$m^{n+1} D_n(g) \leqq D_n(fg) \leqq M^{n+1} D_n(g) \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

; Gleichheit kann hier nur dann bestehen, wenn (mit Ausnahme einer Menge) $f(\theta) = \text{const.}$ ist. Ferner folgt mit Hilfe der Schwarzschen ngleichung

8) $$D_n(fg) \leqq \sqrt{D_n(f^2)D_n(g^2)} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots);$$

er ist das Gleichheitszeichen nur dann gültig, wenn (mit Ausnahme ner 0-Menge) $f(\theta) = \text{const.}\, g(\theta)$ ist.

---

[31]) L'Intermédiaire des Mathématiciens, **21** (1914), S. 27. Question 4340.

[32]) G. Landsberg, Theorie der Elementarteiler linearer Integralgleichungen [Mathematische Annalen, **69** (1910), S. 227—265] S. 231.

18. Es sei jetzt wieder allgemein $f(\theta)$ (L) integrabel. Ich führe einige Hilfssätze aus der Theorie der Hermiteschen Formen an.

Zunächst gibt es bekanntlich eine lineare Transformation

$$x_\varkappa = l_{\varkappa 0}^{(n)}\,\xi_0^{(n)} + l_{\varkappa 1}^{(n)}\,\xi_1^{(n)} + \ldots + l_{\varkappa n}^{(n)}\,\xi_n^{(n)} \qquad (\varkappa = 0, 1, \ldots, n)$$

mit der Eigenschaft

$$(\mathrm{T}') \qquad T_n(f; x_0, x_1, \ldots, x_n) = \lambda_0^{(n)}\,|\xi_0^{(n)}|^2 + \lambda_1^{(n)}\,|\xi_1^{(n)}|^2 + \ldots + \lambda_n^{(n)}\,|\xi_n^{(n)}|^2,$$

während

$$|x_0|^2 + |x_1|^2 + \ldots + |x_n|^2 = |\xi_0^{(n)}|^2 + |\xi_1^{(n)}|^2 + \ldots + |\xi_n^{(n)}|^2$$

ist. Hier bezeichnen

$$(19) \qquad \lambda_0^{(n)}, \lambda_1^{(n)}, \ldots, \lambda_n^{(n)} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

eindeutig bestimmte reelle Konstanten, die ich als die „*zu $f(\theta)$ gehörigen Eigenwerte*" bezeichne. Sie ergeben sich bekanntlich als die Wurzeln der charakteristischen Gleichung

$$D_n(f-\lambda) = [c_{p-q} - \varepsilon_{pq}\lambda]_0^n = \begin{vmatrix} c_0-\lambda & c_{-1} & c_{-2} & \ldots & c_{-n} \\ c_1 & c_0-\lambda & c_{-1} & \ldots & c_{-n+1} \\ c_2 & c_1 & c_0-\lambda & \ldots & c_{-n+2} \\ & & & \ldots & \cdot \\ c_n & c_{n-1} & c_{n-2} & \ldots & c_0-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

(Die Bezeichnung $[a_{pq}]_0^n$ für die zugehörige Determinante wird im folgenden überall benutzt werden.)

Daraus folgt, daß, wenn a und b reelle Konstanten bezeichnen, so gehören zu $a + b f(\theta)$ die Eigenwerte

$$a + b\lambda_\varkappa^n \qquad (\varkappa = 0, 1, \ldots, n;\ n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Ferner ist

$$D_n(f) = \lambda_0^{(n)}\,\lambda_1^{(n)} \ldots \lambda_n^{(n)} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Es sei nun das kleinste bzw. größte unter den Zahlen (19) $\lambda^{(n)}$ bzw. $\Lambda^{(n)}$; aus (T') folgt

$$\lambda^{(n)} = \mathrm{Min}\, T_n(f; x_0, x_1, \ldots, x_n),$$

$$\Lambda^{(n)} = \mathrm{Max}\, T_n(f; x_0, x_1, \ldots, x_n),$$

während

$$|x_0|^2 + |x_1|^2 + \ldots + |x_n|^2 = 1$$

ist. Ist also (mit Ausnahme einer 0-Menge) $m \leqq f(\theta) \leqq M$, so ist

$$(20) \qquad m \leqq \lambda_\varkappa^{(n)} \leqq M \qquad (\varkappa = 0, 1, \ldots, n;\ n = 0, 1, 2, 3, \ldots);$$

Gleichheit besteht hier nur dann, wenn (mit Ausnahme einer 0-Menge) $f(\theta) = \mathrm{const.}$ ist.

§ 7.

Sätze über die Toeplitzschen Determinanten.

19. Ich gebe jetzt der im II. Teil behandelten Minimum-Aufgabe gende Formulierung. Ich setze

$$P_n(z) = x_0 + x_1(z-\alpha) + \ldots + x_n(z-\alpha)^n,$$

an ist

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\,|P_n(z)|^2\,d\theta = \sum_{p=0}^{n}\sum_{q=0}^{n} k_{pq}\,x_p\,\bar{x}_q \qquad (z = e^{i\theta}),$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\,(z-\alpha)^p\,(\bar{z}-\bar{\alpha})^q\,d\theta \qquad (z = e^{i\theta};\ p, q = 0, 1, 2, \ldots)$$

Diese Hermitesche Form ist positiv definit, d. h. ihr Wert ist ner nichtnegativ und verschwindet nur für $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$. Bedingung $P_n(\alpha) = 1$ ist damit äquivalent, daß $x_0 = 1$ ist.

Es gilt nun der elementare Satz:

Ist die Hermitesche Form

$$\sum_{p=0}^{n}\sum_{q=0}^{n} a_{pq}\,x_p\,\bar{x}_q$$

itiv definit, so ist

$$\operatorname*{Min}_{x_0=1} \sum_{p=0}^{n}\sum_{q=0}^{n} a_{pq}\,x_p\,\bar{x}_q = \frac{[a_{pq}]_0^n}{[a_{pq}]_1^n}\ ^{33}).$$

Daraus folgt

$$\mu_n(\alpha; f) = \frac{[k_{pq}]_0^n}{[k_{pq}]_1^n}.$$

Ich betrachte jetzt die lineare Transformation, definiert durch die ntität in z

$$x_0 + x_1(z-\alpha) + \ldots + x_n(z-\alpha)^n = y_0 + y_1 z + \ldots + y_n z^n,$$

$$\begin{aligned} x_0 &= y_0 + y_1\alpha + \ldots + y_n\alpha^n \\ x_1 &= \quad y_1 \quad + \ldots + n\,y_n\alpha^{n-1} \\ &\ldots \\ x_n &= \qquad\qquad y_n. \end{aligned}$$

---

[33]) S. etwa J. A. Serret, Handbuch der höheren Algebra. Zweite Auflage, 1878, . S. 460.

Diese Transformation hat die Determinante 1; ferner hat die Form

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)|y_0+y_1z+\ldots+y_nz^n|^2\,d\theta \qquad (z=e^{i\theta}$$

die Determinante $D_n(f)$. Also

$$[k_{pq}]_0^n = D_n(f).$$

Ähnlich

$$[k_{pq}]_1^n = D_{n-1}[f(.)|z-\alpha|^2] \qquad (z=e^{i\cdot})$$

weil ja

$$\sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{n} k_{pq}x_p\bar{x}_q$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)|z-\alpha|^2|x_1+x_2(z-\alpha)+\ldots+x_n(z-\alpha)^{n-1}|^2\,d\theta \qquad (z=e^{i\theta}$$

ist. Also

$$\mu_n(\alpha;f)=\frac{D_n(f)}{D_{n-1}[f(.)|z-\alpha|^2]} \qquad (z=e^{i\cdot};\ n=1,2,3,\ldots) \tag{21}$$

Ist z. B. $\alpha=0$, so folgt

$$\mu_n(0;f)=\frac{D_n(f)}{D_{n-1}(f)} \qquad (n=1,2,3,\ldots) \tag{22}$$

Es gilt also der

Satz XIII. *Es sei $f(\theta)$ nichtnegativ und (L) integrabel, $A(f)>0$. Die Toeplitzschen Determinanten $D_n(f)$ sind dann sämtlich positiv und*

$$\mu_n(0;f)=\frac{D_n(f)}{D_{n-1}(f)} \qquad (n=1,2,3,\ldots)$$

20. Als unmittelbare Folge der §§ 4 und 5 ergibt sich jetzt eine Reihe von Sätzen über Toeplitzsche Determinanten.

Satz XIV. *Es sei $f(\theta)$ nichtnegativ und (L) integrabel, $A(f)>0$. Die Folge der positiven Zahlen*

$$\frac{D_n(f)}{D_{n-1}(f)} \qquad (n=1,2,3,\ldots)$$

ist monoton abnehmend; es existiert also der Grenzwert

$$\lim_{n=\infty}\frac{D_n(f)}{D_{n-1}(f)}=\lim_{n=\infty}\sqrt[n+1]{D_n(f)}=D(f)\leqq A(f).$$ [34])

Daraus folgt, daß

$$D(f)\leqq\frac{D_n(f)}{D_{n-1}(f)}\leqq A(f) \qquad (n=1,2,3,\ldots)$$

[34]) Diesen Satz hat zuerst Herr M. Fekete mit Hilfe eines Determinantensatzes bewiesen.

t. Man hat nun

$$D_n(f) = A(f) \prod_{\varkappa=1}^{n} \frac{D_\varkappa(f)}{D_{\varkappa-1}(f)} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots),$$

lso

23) $$\frac{D_n(f)}{D_{n-1}(f)} \leqq \sqrt[n+1]{D_n(f)}$$

nd

$$D(f) \leqq \sqrt[n+1]{D_n(f)} \leqq A(f) \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

erner ist

24) $$\sqrt[n+1]{D_n(f)} \leqq \sqrt[n]{D_{n-1}(f)} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots),$$

eil [ich schreibe kurz D_n statt $D_n(f)$]

$$\sqrt[n+1]{D_n} = \sqrt[n+1]{\frac{D_n}{D_{n-1}} D_{n-1}} \leqq \sqrt[n+1]{\frac{D_{n-1}}{D_{n-2}} D_{n-1}} \leqq \sqrt[n+1]{D_{n-1}^{\frac{1}{n}} D_{n-1}} = \sqrt[n]{D_{n-1}}.$$

Satz XV. *Es sei* $f(\theta) \leqq g(\theta)$ *und* $g(\theta)$ *auch* (L) *integrabel. ann ist*

$$\frac{D_n(f)}{D_{n-1}(f)} \leqq \frac{D_n(g)}{D_{n-1}(g)} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Daraus folgt die Ungleichung

$$D(f) \leqq D(g).$$

t ferner $0 \leqq m \leqq f(\theta) \leqq M$, so ergibt sich aus Satz XV[35])

25) $$m \leqq \frac{D_n(f)}{D_{n-1}(f)} \leqq M \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

nd

25′) $$m \leqq \sqrt[n+1]{D_n(f)} \leqq M \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

dlich

$$m \leqq D(f) \leqq M.$$

Aus (11) folgt

26) $$G(f) \leqq \frac{D_n(f)}{D_{n-1}(f)} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

d also

$$G(f) \leqq D(f).$$

Nach Satz XI gilt ferner der

Satz XVI. *Es sei* $f(\theta)$ *nichtnegativ und* (L) *integrabel,* $A(f) > 0$, *eine feste positive Zahl. In der Ungleichung* (26) *besteht dann und r dann das Gleichheitszeichen, wenn* (*mit Ausnahme einer* 0*-Menge*)

$$f(\theta) = \frac{1}{\varphi(\theta)}$$

---

[35]) Ist $c > 0$, so ist $D_n(c) = c^{n+1}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$.

ist, wo $\varphi(\theta)$ ein positives trigonometrisches Polynom n-ter Ordnung bezeichnet.

Ist also $\varphi(\theta)$ ein positives trigonometrisches Polynom p-ter Ordnung und

$$f(\theta) = \frac{1}{\varphi(\theta)},$$

so ist

$$\frac{D_n(f)}{D_{n-1}(f)} = G(f) \qquad (n \geqq p),$$

also

$$D(f) = G(f).$$

Es gilt allgemein der

Satz XVII. *Es sei $f(\theta)$ nichtnegativ und (L) integrabel, $A(f) > 0$. Die Folge der positiven Zahlen*

$$\frac{D_n(f)}{D_{n-1}(f)} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

ist monoton abnehmend und hat den Grenzwert

$$\lim_{n=\infty} \frac{D_n(f)}{D_{n-1}(f)} = \lim_{n=\infty} \sqrt[n+1]{D_n(f)} = G(f).$$ [36])

§ 8.

Ein Satz über die Eigenwerte der Toeplitzschen Formen.

21. Satz XVIII. *Es sei $f(\theta)$ (L) integrabel und $m \leqq f(\theta) \leqq M$. Es seien ferner*

$$\lambda_0^{(n)}, \lambda_1^{(n)}, \ldots, \lambda_n^{(n)} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

die zu $f(\theta)$ gehörigen Eigenwerte. Dann ist

$$m \leqq \lambda_\varkappa^{(n)} \leqq M \qquad (\varkappa = 0, 1, \ldots, n;\ n = 0, 1, 2, \ldots)$$

und wenn $F(\lambda)$ eine für $m \leqq \lambda \leqq M$ definierte stetige Funktion bezeichnet,

$$\lim_{n=\infty} \frac{F(\lambda_0^{(n)}) + F(\lambda_1^{(n)}) + \ldots + F(\lambda_n^{(n)})}{n+1} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F[f(\theta)]\, d\theta.$$ [37])

Der erste Teil dieses Satzes wurde bereits in § 6 bewiesen. Hier muß ich also nur den zweiten Teil beweisen.

---

[36]) Diesen Satz hat Herr G. Pólya vermutet. Sein erster Beweis rührt von mir her und ist für stetige Funktionen in meiner Arbeit enthalten: Ein Grenzwertsatz über die Toeplitzschen Determinanten einer reellen positiven Funktion [Mathematische Annalen, 76 (1915), S. 490—503].

[37]) A. a. O. [6]).

Zunächst ist es klar, daß der Spezialfall $m > 0$, $F(\lambda) = \log \lambda$ in tz XVII enthalten ist. Dann ist nämlich

$$G(f) = e^{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log f(\Theta)\, d\Theta}$$

d also

$$\lim_{n=\infty} \frac{\log D_n(f)}{n+1} = \lim_{n=\infty} \frac{\log \lambda_0^{(n)} + \log \lambda_1^{(n)} + \ldots + \log \lambda_n^{(n)}}{n+1} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log f(\theta)\, d\theta.$$

s diesem Spezialfall folgt aber, wie ich nun zeigen will, der Satz XVIII.

In der Tat sei $|f(\theta)| \leqq \sigma$. Den Fall $A(|f|) = 0$ schließe ich aus, o $\sigma > 0$. Es bezeichne nun α eine reelle Veränderliche und sei $| < \frac{1}{\sigma}$. Dann ist die Funktion $1 + \alpha f(\theta)$ positiv, also nach Satz XVII

$$\lim_{n=\infty} \sqrt[n+1]{D_n(1+\alpha f)} = e^{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log [1+\alpha f(\Theta)]\, d\Theta},$$

er

$$\lim_{n=\infty} \frac{\log(1+\alpha\lambda_0^{(n)}) + \ldots + \log(1+\alpha\lambda_n^{(n)})}{n+1} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log[1+\alpha f(\theta)]\, d\theta \qquad \left(|\alpha| < \frac{1}{\sigma}\right).$$

Die Potenzreihe

$$\log(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k}$$

nvergiert aber für $|x| < 1$; wenn ich also

$$s_n^{(k)} = \lambda_0^{(n)k} + \lambda_1^{(n)k} + \ldots + \lambda_n^{(n)k} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots;\ k = 1, 2, 3, \ldots)$$

ze, so ist die letzte Gleichung folgendermaßen zu schreiben:

$$\lim_{n=\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \frac{s_n^{(k)}}{n+1} \alpha^k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} [f(\theta)]^k \alpha^k \right\} d\theta \qquad \left(|\alpha| < \frac{1}{\sigma}\right);$$

Reihe in der geschweiften Klammer konvergiert aber (für festes α) θ gleichmäßig, also ist

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \frac{s_n^{(k)}}{n+1} \alpha^k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} [f(\theta)]^k\, d\theta \cdot \alpha^k \qquad \left(|\alpha| < \frac{1}{\sigma}\right).$$

Ich benutze jetzt den folgenden Satz von Vitali[38]):

[38]) Auf die Anwendbarkeit des Vitalischen Satzes hat mich Herr G. Pólya merksam gemacht.

Es seien $f_1(z), f_2(z), \ldots, f_n(z), \ldots$ *regulär-analytische Funktionen für* $|z| \leqq R$ *und*

$$|f_n(z)| \leqq M \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots;\ |z| \leqq R).$$

Es existiere ferner $\lim_{n=\infty} f_n(z) = f(z)$ *für unendlich viele* z, *die im Innern des Kreises* $|z| \leqq R$ *mindestens einen Häufungspunkt besitzen. Dann existiert* $\lim_{n=\infty} f_n(z) = f(z)$ *für jedes* $|z| < R$, *und zwar gleichmäßig für* $|z| \leqq \varrho < R$; $f(z)$ *ist somit regulär für* $|z| < R$.

Es ist hier

$$f_n(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \frac{s_n^{(k)}}{n+1} z^k, \qquad f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [f(\theta)]^k d\theta \cdot z^k;$$

ferner kann ich

$$R = \frac{1}{2\sigma}, \quad M = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1$$

setzen. Man hat dann $\lim_{n=\infty} f_n(z) = f(z)$ für jedes z, welches reell ist und im Intervalle $(-R, R)$ liegt. Man hat also gleichmäßig für $|z| \leqq \varrho < R$

$$\lim_{n=\infty} f_n(z) = f(z)$$

und folglich

$$\lim_{n=\infty} \frac{s_n^{(k)}}{n+1} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [f(\theta)]^k d\theta \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots).$$

Das bedeutet aber soviel, daß der Satz XVIII für $F(\lambda) = \lambda^k$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ gültig ist. Da er nun für $F(\lambda) = 1$ trivial ist, so bleibt er auch dann richtig, wenn $F(\lambda)$ ein beliebiges Polynom bezeichnet.

Jetzt gelangt man schon leicht zum Ziele. Es sei nämlich $F(\lambda)$ stetig für $m \leqq \lambda \leqq M$ und $\varepsilon > 0$ beliebig; man kann dann ein Polynom $P(\lambda)$ finden, das die Eigenschaft

$$|F(\lambda) - P(\lambda)| > \varepsilon \qquad (m \leqq \lambda \leqq M)$$

besitzt. Dann ist für jedes n

$$\left| \frac{1}{n+1} \sum_{\varkappa=0}^{n} F(\lambda_\varkappa^{(n)}) - \frac{1}{n+1} \sum_{\varkappa=0}^{n} P(\lambda_\varkappa^{(n)}) \right| < \varepsilon,$$

also

$$\limsup_{n=\infty} \frac{1}{n+1} \sum_{\varkappa=0}^{n} F(\lambda_\varkappa^{(n)}) \leqq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P[f(\theta)]\, d\theta + \varepsilon \leqq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F[f(\theta)]\, d\theta + 2\varepsilon.$$

lich folgt

$$\liminf_{n=\infty} \frac{1}{n+1} \sum_{\varkappa=0}^{n} F(\lambda_\varkappa^{(n)}) \geqq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F[f(\theta)]\, d\theta - 2\varepsilon,$$

. da ε beliebig klein ist,

$$\lim_{n=\infty} \frac{1}{n+1} \sum_{\varkappa=0}^{n} F(\lambda_\varkappa^{(n)}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F[f(\theta)\, d\theta, \qquad \text{q. e. d.}$$

§ 9.

Verallgemeinerungen.

22. Satz XVIII gestattet einige Verallgemeinerungen. Zunächst re ich folgenden bekannten Hilfssatz:

Es sei

$$A_n(x_0, x_1, \ldots, x_n) = \sum_{p=0}^{n} \sum_{q=0}^{n} a_{pq} x_p \bar{x}_q \qquad (a_{pq} = \bar{a}_{qp})$$

beliebige Hermitesche Form und

$$\mathsf{A}_n(x_0, x_1, \ldots, x_n) = \sum_{p=0}^{n} \sum_{q=0}^{n} \alpha_{pq} x_p \bar{x}_q \qquad (\alpha_{pq} = \bar{\alpha}_{qp})$$

tiv definit. Dann gibt es eine lineare Transformation der Variablen $x_1, \ldots, x_n$, *so daß*

$$A_n(x_0, x_1, \ldots, x_n) = \lambda_0 |\xi_0|^2 + \lambda_1 |\xi_1|^2 + \ldots + \lambda_n |\xi_n|^2$$

$$\mathsf{A}_n(x_0, x_1, \ldots, x_n) = |\xi_0|^2 + |\xi_1|^2 + \ldots + |\xi_n|^2$$

$\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n$ *sind hier eindeutig bestimmte reelle Konstanten, die „charakteristischen Gleichung"*

$$[a_{pq} - \lambda \alpha_{pq}]_0^n = 0$$

gen.

Die Konstanten $\lambda_\varkappa$ kann ich als *die zu* $A_n(x)$ *gehörigen Eigenwerte weiteren Sinne*), oder als *die Eigenwerte mit der Nebenbedingung* $) = 1$ bezeichnen. Ist

$$\mathsf{A}_n(x) = |x_0|^2 + |x_1|^2 + \ldots + |x_n|^2,$$

immen diese mit den gewöhnlichen Eigenwerten (Pkt. 18) überein. Es sei nun λ die kleinste, Λ die größte unter diesen Konstanten; hat man

$$\lambda = \operatorname{Min} A_n(x),$$
$$\Lambda = \operatorname{Max} A_n(x),$$

während $\mathsf{A}_n(x) = 1$ ist. Ist also $m \leqq A_n(x) \leqq M$, während $\mathsf{A}_n(x) =$ ist, so hat man

$$m \leqq \lambda_\varkappa \leqq M \qquad (\varkappa = 0, 1, \ldots, n)$$

Ferner ist es klar, daß wenn a und b beliebige reelle Konstanten bezeichnen, so gehören zu der Form

$$a A_n(x) + b \mathsf{A}_n(x)$$

die Eigenwerte

$$a\lambda_\varkappa + b \qquad (\varkappa = 0, 1, \ldots, n)$$

23. Diese Sätze benutze ich zur Lösung der folgenden Aufgabe:

Es seien $f(\theta)$, $g(\theta)$ (L) *integrabel*, $0 < \mu \leqq g(\theta) \leqq \mathsf{M}$ *und*

$$m \leqq \frac{f(\theta)}{g(\theta)} \leqq M.$$

Ich frage nach dem Minimum bzw. Maximum der Form

$$T_n(f; x_0, x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\,|x_0 + x_1 z + \ldots + x_n z^n|^2\, d\theta \qquad (z = e^{i\theta})$$

unter der Nebenbedingung

$$T_n(g; x_0, x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(\theta)\,|x_0 + x_1 z + \ldots + x_n z^n|^2\, d\theta = 1 \quad (z = e^{i\theta}).$$

Nach den vorigen betrachte ich einfach die charakteristische Gleichung in ϱ

$$D_n(f - \varrho g) = 0,$$

die $n+1$ reelle Wurzeln

$$\varrho_0^{(n)}, \varrho_1^{(n)}, \ldots, \varrho_n^{(n)}$$

besitzt. Das kleinste bzw. größte unter diesen liefert das gesuchte Minimum bzw. Maximum.

Es ist also

$$m \leqq \varrho_\varkappa^{(n)} \leqq M \quad (\varkappa = 0, 1, \ldots, n;\ n = 0, 1, 2, \ldots)$$

und nur dann kann hier Gleichheit bestehen, wenn (mit Ausnahme einer 0-Menge) $f(\theta) = \text{const.}\, g(\theta)$ ist.

Ferner ist

$$\varrho_0^{(n)}\, \varrho_1^{(n)} \ldots \varrho_n^{(n)} = \frac{D_n(f)}{D_n(g)},$$

also für $m > 0$

$$\lim_{n=\infty} \sqrt[n+1]{\varrho_0^{(n)}\, \varrho_1^{(n)} \ldots \varrho_n^{(n)}} = G\left(\frac{f}{g}\right).$$

Daraus ergibt sich mit wörtlicher Wiederholung des Verfahrens in § 8 die folgende Verallgemeinerung des dort bewiesenen Satzes:

Satz XIX. *Es seien* $f(\theta), g(\theta)\,(L)$ *integrabel,* $0 < \mu \leqq g(\theta) \leqq M$ *und*

$$m \leqq \frac{f(\theta)}{g(\theta)} \leqq M.$$

ferner

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta) z^n \, d\theta,$$

$$d_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(\theta) z^n \, d\theta \qquad (z = e^{i\theta};\ n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

dann hat die Gleichung

$$[c_{p-q} - \varrho d_{p-q}]_0^n = 0$$

lauter reelle Wurzeln

$$\varrho_0^{(n)}, \varrho_1^{(n)}, \ldots, \varrho_n^{(n)},$$

welche

$$m \leqq \varrho_\varkappa^{(n)} \leqq M \qquad (\varkappa = 0, 1, \ldots, n;\ n = 0, 1, 2, \ldots)$$

und wenn $F(\varrho)$ *eine für* $m \leqq \varrho \leqq M$ *definierte stetige Funktion bezeichnet,*

$$\lim_{n=\infty} \frac{F(\varrho_0^{(n)}) + F(\varrho_1^{(n)}) + \ldots + F(\varrho_n^{(n)})}{n+1} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F\left[\frac{f(\theta)}{g(\theta)}\right] d\theta.$$

24. Ich beweise jetzt folgende Verallgemeinerung des Satzes XVIII:

Satz XX. *Satz* XVIII *gilt auch dann, wenn* $F(\lambda)$ *eine endliche Anzahl von Unstetigkeiten erster Art besitzt, angenommen, daß* $f(\theta)$ *die folgende Bedingung erfüllt: Ist* λ_0 *irgendeine dieser Unstetigkeitsstellen, so ist*

$$\operatorname{mes} E[f(\theta) = \lambda_0] = 0.$$

Ist z. B. $f(\theta)$ ein Polynom oder ein trigonometrisches Polynom, welches nicht identisch verschwindet, so ist diese Bedingung immer erfüllt.

Es genügt offenbar, den Satz für eine solche Funktion $F(\lambda)$ zu beweisen, welche die einzige Unstetigkeitsstelle erster Art λ_0 besitzt. Es sei $\varepsilon > 0$ beliebig; ich bezeichne mit $G_1(\lambda)$ und $G_2(\lambda)$ zwei stetige Funktionen, die den Bedingungen genügen:

a) $G_1(\lambda) = G_2(\lambda) = F(\lambda)$ für $|\lambda - \lambda_0| \geqq \varepsilon$.

b) $G_1(\lambda) \leqq F(\lambda)$ für $|\lambda - \lambda_0| \leqq \varepsilon$.

c) $G_2(\lambda) \geqq F(\lambda)$ für $|\lambda - \lambda_0| \leqq \varepsilon$.

Es seien ferner

$$|F(\lambda)| \text{ und } |G_\varkappa(\lambda)| < g \qquad (\varkappa = 1, 2;\ m \leqq \lambda \leqq M),$$

g von ε unabhängig ist. Man hat dann

$$\frac{1}{n+1}\sum_{\varkappa=0}^{n} F(\lambda_\varkappa^{(n)}) \leqq \frac{1}{n+1}\sum_{\varkappa=0}^{n} G_2(\lambda_\varkappa^{(n)}),$$

also

$$\limsup_{n=\infty} \frac{1}{n+1} \sum_{\varkappa=0}^{n} F(\lambda_\varkappa^{(n)}) \leqq \lim_{n=\infty} \frac{1}{n+1} \sum_{\varkappa=0}^{n} G_2(\lambda_\varkappa^{(n)}) =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} G_2[f(\theta)]\, d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_{|f(\Theta)-\lambda_0| \geqq \varepsilon} F[f(\theta)]\, d\theta + \frac{1}{2\pi} \int_{|f(\Theta)-\lambda_0|<\varepsilon} G_2[f(\theta)]\, d\theta$$

$$\leqq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F[f(\theta)]\, d\theta + \frac{g}{\pi} \int_{|f(\Theta)-\lambda_0|<\varepsilon} d\theta.$$

Ähnlich ergibt sich

$$\liminf_{n=\infty} \frac{1}{n+1} \sum_{\varkappa=0}^{n} F(\lambda_\varkappa^{(n)}) \geqq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F[f(\theta)]\, d\theta - \frac{g}{\pi} \int_{|f(\Theta)-\lambda_0|<\varepsilon} d\theta.$$

Es ist aber

$$\lim_{\substack{\varepsilon=+0 \\ |f(\Theta)-\lambda_0|<\varepsilon}} \int d\theta = \operatorname{mes} E[f(\theta) = \lambda_0] = 0,$$

woraus die Behauptung folgt.

Satz XIX läßt eine analoge Verallgemeinerung zu.

§ 10.

Anwendungen.

25. Als Anwendung der Vorhergehenden beweise ich den

Satz XXI. *Es sei $f(\theta)$ beschränkt und (L) integrabel, ihre Eigenwerte*

$$\lambda_0^{(n)}, \lambda_1^{(n)}, \ldots, \lambda_n^{(n)} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots) \tag{19}$$

Es seien $\alpha < \beta$ beliebige reelle Zahlen, für welche

$$\operatorname{mes} E[\alpha < f(\theta) < \beta] > 0$$

ist, so fällt für genügend große n wenigstens eine der Zahlen (19) in das Intervall $\alpha < \lambda < \beta$.

Andernfalls könnte ich nämlich eine stetige Funktion $F(\lambda)$ folgendermaßen definieren. Ich wähle zunächst die Zahlen α', β' so, daß $\alpha < \alpha' < \beta' < \beta$ und

$$\operatorname{mes} F[\alpha' < f(\theta) < \beta'] > 0$$

sei. (Das ist immer möglich.) Ich setze dann

$$F(\lambda) = \begin{cases} 0 \\ \dfrac{\lambda-\alpha}{\alpha'-\alpha} \\ 1 \\ \dfrac{\beta-\lambda}{\beta-\beta'} \\ 0 \end{cases} \quad \text{für} \quad \begin{cases} \lambda \leqq \alpha \\ \alpha \leqq \lambda \leqq \alpha' \\ \alpha' \leqq \lambda \leqq \beta' \\ \beta' \leqq \lambda \leqq \beta \\ \beta \leqq \lambda \end{cases}$$

ut Voraussetzung gibt es beliebig große n, für welche

$$\frac{F(\lambda_0^{(n)}) + F(\lambda_1^{(n)}) + \ldots + F(\lambda_n^{(n)})}{n+1} = 0,$$

hrend

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F[f(\theta)]\,d\theta \geqq \frac{1}{2\pi}\int_{\alpha' < f(\theta) < \beta'} F[f(\theta)]\,d\theta = \frac{1}{2\pi}\,\mathrm{mes}\,E[\alpha' < f(\theta) < \beta'] > 0$$

und das widerspricht dem Satze XVIII.

26. Eine Folgerung des vorigen Satzes ist der

Satz XXII. *Es sei $f(\theta)(L)$ integrabel und (mit Ausnahme einer Menge) $m \leqq f(\theta) \leqq M$; es gebe dabei keine Zahl $m' > m$ bzw. $M' < M$ t derselben Eigenschaft. Ich setze*

$$\lambda^{(n)} = \mathrm{Min}\,\lambda_\varkappa^{(n)} \qquad (0 \leqq \varkappa \leqq n),$$

$$\Lambda^{(n)} = \mathrm{Max}\,\lambda_\varkappa^{(n)} \qquad (0 \leqq \varkappa \leqq n),$$

n ist

$$\lim_{n=\infty} \lambda^{(n)} = m \quad \textit{und} \quad \lim_{n=\infty} \Lambda^{(n)} = M\ ^{39}).$$

Ferner:

Es sei $f(\theta)$ stetig, ihr Minimum m, ihr Maximum M. Ihre Eigente sind dann im Intervalle (m, M) überall dicht.

Ähnliche Sätze gelten für die im Satze XIX definierten Eigenwerte $\varrho_\varkappa^{(n)}$.

27. Als Anwendung des Satzes XIX beweise ich nun den

Satz XXIII. *Es sei*

$$\chi(z) = \frac{1}{2} + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n + \ldots$$

$|z| \leqq 1$ *regulär und* $\Re\,\chi(z) \geqq 0$. *(Den Fall* $\chi(z) = \frac{1}{2}$ *schließe ich .) Dann ist* $|a_1| < 1$ *und wenn ich*

$$|a_1| = \sin\varphi \qquad \left(0 \leqq \varphi < \frac{\pi}{2}\right)$$

e, so kann die Kurve

$$w = \chi(z) \qquad (z = e^{i\theta})$$

ht ganz im Winkelraume

$$-\varphi \leqq \mathrm{Arg}\,w \leqq \varphi$$

en.

Ich setze

$$\chi(z) = g(\theta) + i f(\theta) \qquad (z = e^{i\theta}),$$

---

[39]) S. F. Riesz, Les systèmes d'équations linéaires à une infinité d'inconnues, s (Gauthier-Villars), 1913, S. 177—178.

wo $g(\theta) \geqq 0$ ist. Man kann offenbar voraussetzen, daß $g(\theta) \geqq \mu > 0$ ist, da sonst die Behauptung trivial ist. Ich betrachte den Quotienten

$$\operatorname{tg} \Phi(\theta) = \frac{f(\theta)}{g(\theta)},$$

wo $\Phi(\theta) = \operatorname{Arg} \chi(e^{i\theta})$ der Bedingung

$$-\frac{\pi}{2} \leqq \Phi(\theta) \leqq \frac{\pi}{2}$$

unterworfen ist. Man hat nun mit Hilfe der vorigen Bezeichnungen

$$c_0 = 0, \qquad d_0 = \tfrac{1}{2}$$
$$c_1 = \frac{i\alpha_1}{2}, \qquad d_1 = \frac{\bar{\alpha}_1}{2};$$

aus

$$D_1(g) = \begin{vmatrix} d_0 & \bar{d}_1 \\ d_1 & d_0 \end{vmatrix} = \frac{1 - |\alpha_1|^2}{4} > 0$$

folgt also $|\alpha_1| < 1$. Ferner ist die charakteristische Gleichung für $n = 1$

$$\frac{\varrho^2}{4} = \frac{|\alpha_1|^2}{4} |\varrho - i|^2 = \frac{|\alpha_1|^2}{4}(\varrho^2 + 1),$$

woraus

$$\varrho = \pm \frac{|\alpha_1|}{\sqrt{1 - |\alpha_1|^2}} = \pm \operatorname{tg} \varphi$$

folgt. Also ist

$$\operatorname{Min} \Phi(\theta) < -\varphi,$$
$$\operatorname{Max} \Phi(\theta) > \varphi \qquad (0 \leqq \theta \leqq 2\pi),$$

q. e. d.

28. Aus Satz XX folgt unmittelbar der

Satz XXIV. *Es sei $f(\theta)$ beschränkt und (L) integrabel, ferner*

$$\operatorname{mes} E[f(\theta) = 0] = 0.$$

Ich bezeichne die Anzahl der nichtnegativen Elemente in der Folge

$$\lambda_0^{(n)}, \lambda_1^{(n)}, \ldots, \lambda_n^{(n)},$$

oder, was dasselbe ist, in der Folge

$$D_0(f), D_1(f), \ldots, D_n(f)$$

mit $p(n)$; ferner sei

$$\operatorname{mes} E[f(\theta) \geqq 0] = p.$$

Dann ist

$$\lim_{n=\infty} \frac{p(n)}{n+1} = \frac{p}{2\pi}$$ [40].

Hiermit schließe ich die Reihe der Anwendungen.

---

[40]) Man vgl. O. Toeplitz, a. a. O. [4]) b) S. 506 und [4]) c) S. 368.

(Eingegangen am 26. Februar 1919.)

ber das Gleichgewicht von elastischen Platten unter einer Einzellast.

Von

Hans Happel in Tübingen.

§ 1.

In der vorliegenden Arbeit beschäftigen wir uns mit Fragen, die sich f das Gleichgewicht von ursprünglich ebenen elastischen Platten beziehen. r setzen dabei durchweg voraus, daß die Punkte der Mittelebene der tte senkrecht zur ursprünglichen Lage dieser Ebene deformiert werden d außerdem nehmen wir stets an, daß diese Verschiebungen klein sind Vergleich zur Plattendicke; von den beiden Gliedern, aus denen sich Potential der innern Kräfte zusammensetzt, kommt dann nur das eine Betracht, das mit der dritten Potenz der Plattendicke proportional [1]). Bei jedem der Probleme, die hier behandelt werden, tritt ferner e Einzellast auf, die auf der Platte auflagert.

Im folgenden wird zunächst ein allgemeines Theorem bewiesen, das n auf den Fall des Gleichgewichts einer beliebig berandeten Platte unter er Einzellast bezieht, die in einem beliebigen Punkte auflagert, außer- n darf noch eine beliebige kontinuierliche Druckkraft auf die Platte ken. Der Rand darf eingeklemmt oder gestützt oder frei sein, im tern Fall muß natürlich die kontinuierliche Druckkraft von unten her ken, damit Gleichgewicht besteht.

Sodann wird an einigen Beispielen erläutert, wie man die Methode Ritz[2]) auf den Fall anwenden kann, wo eine Einzellast auf der Platte

[1]) Siehe z. B. G. Kirchhoff, Vorlesungen über Mechanik, 4. Auflage, Leipzig 7, S. 454 oder E. Mathieu, Théorie de l'élasticité des corps solides I, Paris 1890, 71.

[2]) Vgl. W. Ritz, Journal f. d. reine und angew. Mathematik, **135** (1909), S. 1–61 Annalen der Physik 4. Folge, **28** (1909), S. 737–786.

lagert. Dieses von Ritz unter Benutzung eines von Hilbert[3]) aufgestellten Satzes entwickelte Verfahren scheint mir von größter Bedeutung für die mathematische Physik zu sein.

§ 2.

Wir denken uns eine ursprünglich ebene, aber beliebig berandete Platte. Die Ebene, in der die Mittelfläche der Platte im unbelasteten Zustande liegt, wählen wir als xy-Ebene eines rechtwinkligen Koordinatensystems, dessen $+z$-Achse senkrecht zur unbelasteten Mittelfläche unterhalb der Platte verläuft. Auf der Platte laste in einem beliebigen Punkt eine Einzellast, deren Gewicht P sei. Wir denken uns zunächst, daß dieses Gewicht auf das äußerst kleine kreisförmige Flächengebiet f um A wirkt; an einer beliebigen Stelle innerhalb f sei der Druck pro Flächeneinheit p, es ist dann $\iint_f p\,dx\,dy = P$. Außerdem möge noch eine kontinuierliche verteilte Kraft $F(x, y)$ wirken.

Die Deformation der Mittelebene sei w. Die Ermittelung von w ist bekanntlich mit dem folgenden Problem identisch. Man soll eine Funktion w bestimmen, die innerhalb der Platte, jedoch mit Ausnahme des Gebietes f, der Gleichung

$$\frac{4}{3} K h^3 \frac{1+2\theta}{1+\theta} \Delta\Delta w = F(x, y) \tag{1}$$

genügt. Hierbei ist $2h$ die Dicke der Platte und K und θ sind die Elastizitätskonstanten in Kirchhoffscher Bezeichnungsweise; F ist negativ, falls die kontinuierliche Kraft auf die untere Plattenfläche wirkt. Innerhalb f hat w die Gleichung

$$\frac{4}{3} K h^3 \frac{1+2\theta}{1+\theta} \Delta\Delta w = p + F \tag{2}$$

zu genügen; hieraus folgt, da $\iint_f F\,dx\,dy$ wegen der Kleinheit von f zu vernachlässigen ist und p wenigstens in einem Teilgebiet von f groß gegen F ist[4]):

$$\iint_f \frac{4}{3} K h^3 \frac{1+2\theta}{1+\theta} \Delta\Delta w\,dx\,dy = P. \tag{3}$$

Die Randbedingungen hängen davon ab, ob der Rand eingeklemmt, gestützt oder frei ist.

Für unsere weiteren Betrachtungen setzen wir voraus, daß w sowie seine sämtlichen Differentialquotienten bis zur vierten Ordnung einschließ-

---

[3]) Vgl. D. Hilbert, Über d. Dirichletsche Prinzip. Festschr. d. Kgl. Gesellsch. d. Wissensch. zu Göttingen. Mathem.-phys. Kl. Berlin 1901, S. 17—37.

[4]) Siehe z. B. A. Föppl, Vorlesungen über technische Mechanik, V (1907), S. 111.

n im Innern und auf dem Rande der Platte jedoch außerhalb f endlich
l stetig sind. Innerhalb f, wo ja w nicht der Gleichung (1), sondern der
eichung (2) zu genügen hat, verlangen wir, daß w und seine Differential-
otienten bis zur dritten Ordnung einschließlich endlich und stetig sind;
jenigen der vierten Ordnung brauchen nur endlich zu sein. Am Rande
n f sollen die Werte, die w innerhalb f zukommen, stetig übergehen
die Werte, die w außerhalb f annimmt, und dasselbe soll auch für die
fferentialquotienten von w bis zur dritten Ordnung einschließlich gelten[5]).
nerhalb f kann die Funktion p wenigstens bis zu einem gewissen Grade
iebig gewählt werden, doch muß $\iint_f p\,dx\,dy = P$ sein. Insbesondere
nnen wir p als stetige Funktion auffassen, die am Rande von f überall
rschwindet und innerhalb f sehr groß wird. Ist ϱ der Radius des
ßerst kleinen und kreisförmig vorausgesetzten Gebiets f, dessen Rand-
rve l sein möge, und bezeichnet man mit $(\Delta w)_l$ den Wert von Δw auf l,
nehmen wir weiter an, daß $\varrho\,(\Delta w)_l$ mit verschwindendem ϱ ebenfalls
rschwindet. Von der Funktion $F(x, y)$ setzen wir voraus, daß sie nebst
en sämtlichen partiellen Differentialquotienten $\frac{\partial^{p+q} F}{\partial x^p\,\partial y^q}$ $(p = 0, 1, 2, \ldots, \mu;$
$= 0, 1, 2, \ldots, \nu;$ wobei μ mit ν ganz beliebige Zahlen sind, nur muß
$\geqq 1$ und $\nu \geqq 1$ sein) innerhalb und auf dem Rande der Platte endlich
l stetig ist. Es sei r der Abstand eines beliebigen Punktes der Platte
n dem Punkt, in dem die Einzellast auflagert. Wir wollen zeigen, daß
n w in der folgenden Form darstellen läßt:

$$w = \frac{P}{8\pi q} r^2 \log r + X(x, y),$$

bei zur Abkürzung

$$q = \frac{4}{3} K h^3 \frac{1+2\theta}{1+\theta}$$

etzt ist und die Funktion $X(x, y)$ der Gleichung (1), d. h. der Glei-
ng

$$q\,\Delta\Delta X = F$$

ügt. Außerdem ist X nebst seinen sämtlichen partiellen Differential-
otienten $\frac{\partial^{p+q} X}{\partial x^p\,\partial y^q}$ $(p \leqq \mu + 3,\ q \leqq \nu + 3$ und $p + q \leqq \mu + \nu + 3)$ inner-
b der ganzen Platte endlich und stetig.

Bereits Love[6]) hat darauf aufmerksam gemacht, daß dieser Satz in

[5]) Siehe H. Lorenz, Technische Elastizitätslehre, 48 (1913), S. 485.

[6]) Vgl. A. E. H. Love, Lehrbuch der Elastizität, deutsch von A. Timpe,
pzig 1907, S. 562. Siehe auch H. Happel, Göttinger Nachrichten. Mathem.
s. Kl. 1914, S. 37—62.

den speziellen Fällen richtig ist, in denen w bis jetzt ermittelt ist. So ist z. B. für eine kreisförmige am Rande eingeklemmte und im Mittelpunkt mit dem Gewicht P belastete Platte, falls außerdem keine Kräfte wirksam sind, also $F = 0$ ist:

$$w = \frac{P}{8\pi q}[r^2 \log r - r^2 \log a + \tfrac{1}{2}(a^2 - r^2)],$$

wobei a der Radius der Platte ist.

§ 3.

Um den Satz allgemein zu beweisen, gehen wir aus von einer Erweiterung des Greenschen Satzes, die wir Mathieu[7]) verdanken. Hiernach ist, falls U und V zwei Funktionen sind, die nebst ihren sämtlichen Ableitungen bis zur vierten Ordnung einschließlich innerhalb eines Gebietes S stetig sind, wenn überdies hinsichtlich der Beschaffenheit der Randkurve s von S und des Verhaltens von U und V auf s gewisse leicht angebbare Bedingungen erfüllt sind,

$$(7) \qquad \iint_S (U \Delta\Delta V - V \Delta\Delta U)\, dS$$

$$= \int_s \left[\Delta U \frac{\partial V}{\partial n} - V \frac{\partial \Delta U}{\partial n} - \Delta V \frac{\partial U}{\partial n} + U \frac{\partial \Delta V}{\partial n} \right] ds.$$

Hier stellt n die äußere Normale dar. Bei der Durchlaufung von s soll S zur Linken liegen.

Wir setzen $V = r^2 \log r$, wobei jetzt r in einer etwas allgemeinen Bedeutung wie vorhin gebraucht wird; sind nämlich a, b und x, y zwei beliebige Punkte von S, so soll sein:

$$r^2 = (x - a)^2 + (y - b)^2.$$

Der Punkt a, b wird im folgenden als ein fester Punkt angesehen. Die Funktion U werden wir später mit w identifizieren. Um Gleichung (7) anwenden zu können, verstehen wir unter S das Gebiet der Platte, wobei aber einmal das kleine Gebiet f, dessen Randkurve l sein möge, auszunehmen ist und außerdem ist in S nicht enthalten das kleine Gebiet C, das den Punkt a, b umgibt und dessen Randkurve c sei. Da $\Delta(r^2 \log r) = 4 \log r + 4$ und $\Delta\Delta(r^2 \log r) = 0$, so hat man nach (7)

---

[7]) Vgl. É. Mathieu, Journal de Lionville, 14 (1869), S. 378–421.

$$-\iint_S r^2 \log r \, \Delta\Delta U \, dx\, dy$$

$$= \int_s \left[\Delta U \frac{\partial}{\partial n}(r^2 \log r) - r^2 \log r \frac{\partial \Delta U}{\partial n} - (4 \log r + 4) \frac{\partial U}{\partial n} + 4 U \frac{\partial}{\partial n} \log r \right] ds$$

$$+ \int_c \left[\Delta U \frac{\partial}{\partial n}(r^2 \log r) - r^2 \log r \frac{\partial \Delta U}{\partial n} - (4 \log r + 4) \frac{\partial U}{\partial n} + 4 U \frac{\partial}{\partial n} \log r \right] dc$$

$$+ \int_l \left[\Delta U \frac{\partial}{\partial n}(r^2 \log r) - r^2 \log r \frac{\partial \Delta U}{\partial n} - (4 \log r + 4) \frac{\partial U}{\partial n} + 4 U \frac{\partial}{\partial n} \log r \right] dl.$$

Ohne Einschränkung der Allgemeinheit wählen wir auch das Gebiet C kreisförmig, da wir C schließlich auf null zusammenschrumpfen lassen; Mittelpunkt von C soll der Punkt a, b sein. Im zweiten der Integrale ats verschwindet beim Grenzübergang alles bis auf das Glied $\int_c 4 U \frac{\partial}{\partial n} \log r \, dc$,

ches in der Grenze den Wert $-8\pi U(a, b)$ annimmt; das Minus- hen muß hier deshalb stehen, weil n die äußere Normale von S ist folglich in das Innere des Gebiets C gerichtet ist. Für das über l erstreckende Integral ist $r^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2$ endlich, da (a, b) erhalb l liegt. Setzen wir also von U noch weiter voraus, daß ihm die übrigen Eigenschaften zukommen, die wir über w vorausgesetzt en, so konvergieren die Glieder $\int_l \Delta U \frac{\partial}{\partial n}(r^2 \log r)\, dl$, $\int_l \{4 \log r + 4\} \frac{\partial U}{\partial n} dl$

$\int_l 4 U \frac{\partial}{\partial n} \log r \, dl$ gegen Null. Dies ist, wie die Lage des Punktes) gegenüber f ist, bezüglich der Integrale $\int_l \Delta U \frac{\partial}{\partial n}(r^2 \log r)\, dl$ und $\log r + 4\} \frac{\partial U}{\partial n} dl$ ohne weiteres ersichtlich. Was $\int_l U \frac{\partial}{\partial n} \log r \, dl$ be- t, so kann man hier, bis auf Glieder höherer Ordnung, U auf l tant annehmen und vor das Integralzeichen setzen. Wendet man auf $\int_l \frac{\partial}{\partial n} \log r \, dl$ den Gaußschen Satz an und beachtet man, daß) außerhalb f liegt und daß daher für solche (x, y), die innerhalb f n, $\Delta \log r = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \log r + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \log r = 0$ ist, so folgt weiter $\int_l \frac{\partial}{\partial n} \log r \, dl$

$\iint_f \Delta \log r \, dx\, dy = 0$.

Identifizieren wir nun U mit w und beachten wir, daß außerhalb f Gleichung (1) besteht, so folgt aus (8) mit Rücksicht auf (5) bis auf en, die mit dem Halbmesser von f verschwinden,

$$w(a,b) = -\frac{r^2}{8\pi}\log r \int_l \frac{\partial \Delta w}{\partial n} dl + \frac{1}{8\pi q}\iint_S r^2 \log r\, F(x,y)\, dx\, dy$$

(9)
$$+\frac{1}{8\pi}\int_s \left[\Delta w \frac{\partial}{\partial n}(r^2 \log r) - r^2 \log r \frac{\partial \Delta w}{\partial n} - (4\log r + 4)\frac{\partial w}{\partial n} + 4w\frac{\partial}{\partial n}\log r\right]$$

Im ersten Term der rechten Seite ist r die Entfernung von $(x, y$ bis zum Punkte (a, b); dieses r hat dieselbe Bedeutung wie das r in (4) Da in dem Faktor $\int_l \frac{\partial \Delta w}{\partial n} dl$ der Integrand für die Punkte der Randkurve zu bilden ist, so ist er unabhängig von (a, b). Mit Hilfe des Gaußsche Satzes läßt sich $\int_l \frac{\partial \Delta w}{\partial n} dl$ noch in einer anderen Form schreiben, man er hält nämlich:

(10)
$$-\int_l \frac{\partial \Delta w}{\partial n} dl = \iint_f \Delta\Delta w\, dx\, dy.$$

Berücksichtigt man noch (3) und (5), so folgt:

(11)
$$-\int_l \frac{\partial \Delta w}{\partial n} dl = \frac{P}{q}.$$

In dem Flächenintegral in (9) ist beim Grenzübergang unter S das ganze Gebiet der Platte zu verstehen.

Wegen (11) geht (9) über in.

(12)
$$w(a,b) = \frac{r^2}{8\pi}\frac{P}{q}\log r + X(a,b),$$

wobei

(13)
$$X(a,b) = \frac{1}{8\pi q}\iint_S r^2 \log r\, F(x,y)\, dx\, dy$$

$$+\frac{1}{8\pi}\int_s \left[\Delta w \frac{\partial}{\partial n} r^2 \log r - r^2 \log r \frac{\partial \Delta w}{\partial n} - \{4\log r + 4\}\frac{\partial w}{\partial n} + 4w\frac{\partial}{\partial n}\log r\right] ds$$

Da nach Voraussetzung w außerhalb von f der Gleichung (1), d. h. de Gleichung $\Delta\Delta w(a,b) = \frac{F(a,b)}{q}$ genügt und hier außerdem $\Delta\Delta(r^2 \log r) =$ ist, so folgt aus (12), daß für $X(a,b)$ die Relation

(14)
$$q\Delta\Delta X(a,b) = F(a,b)$$

besteht. Dies ergibt sich auch direkt aus (13) in analoger Weise wie be Ritz[8]); bei der Bildung von $\Delta\Delta X(ab)$ nach der Ritzschen Method liefert das Linienintegral von (13) keinen Beitrag, da a und b nur i

[8]) W. Ritz, Journal f. d. reine u. angewandte Mathem., **135** (1909), S. 7.

$\log r$ und $\log r$ vorkommen und $\Delta\Delta(r^2 \log r) = 0$ und $\Delta\Delta \log r = 0$ ist. f schließlich unendlich klein wird und $F(x, y)$ im ganzen Gebiet der te nach Voraussetzung stetig ist, so gilt (14) auch für das ganze Ge- der Platte. Damit ist gezeigt, daß sich die Funktion w in der Form (4), ja mit (12) identisch ist, darstellen läßt.

Die in § 2 ausgesprochene Behauptung, daß X nebst seinen sämt- en Differentialquotienten $\frac{\partial^{q+p} X(x,y)}{\partial x \, dy^q}$ $(p \leqq \mu + 3, \quad q \leqq \nu + 3$ und $q \leqq \mu + \nu + 3)$ für Punkte x, y im Innern der Platte endlich und ig ist, ergibt sich mittels (13) durch analoge Betrachtungen wie bei z[9]). Endlich erkennt man, daß die gemachte Voraussetzung, daß $w)_l$ mit ϱ zugleich verschwindet, nicht im Widerspruch mit (12) steht.

Um eine Anwendung von dem erhaltenen Resultat zu machen, denken uns eine elliptische am Rande eingeklemmte Platte, die in einem be- igen Punkte eine Einzellast trägt, während sonst keine Kräfte wirksam . Um die Verschiebung w zu berechnen, hat man nur den Ansatz (12) machen und die darin vorkommende Funktion X so zu bestimmen, daß

$$\Delta\Delta X = 0$$

die Randbedingungen

$$w = \frac{r^2}{8\pi} \frac{P}{q} \log r + X = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial n} = \frac{P}{8\pi q} \frac{\partial}{\partial n}(r^2 \log r) + \frac{\partial X}{\partial n} = 0$$

llt sind. Mit der Berechnung der Funktion X, die diesen Bedingun- genügt, beschäftigt sich Mathieu in seiner schon genannten Ab- llung.

§ 4.

Wir wollen nun an einigen Beispielen erläutern, wie die Ritzsche[10]) hode zur Behandlung von Gleichgewichtsproblemen elastischer Platten den Fall auszudehnen ist, wo man es mit einer Einzellast zu tun hat. Problem, das wir hier zunächst behandeln, ist das folgende: Eine rünglich ebene rechteckige Platte von den Seitenlängen $2a$ und $2b$ vimme auf einer Flüssigkeit. Auf der Platte laste das Gewicht P, zwar setzen wir zunächst voraus, daß es sich im Mittelpunkte befindet. icht wird die Deformation der Mittelebene. Wie Föppl[11]) hervor- , ist das eben genannte Problem vom mathematischen Standpunkt kommen äquivalent mit dem folgenden: Eine rechteckige Platte, die Mittelpunkt mit dem Gewicht P beschwert ist, ruht auf einer nach-

[9]) W. Ritz, l. c. S. 7 u. 8.
[10]) Vgl. W. Ritz, loc. cit.[2]).
[11]) A. Föppl, Vorlesungen über technische Mechanik, 5 (1907), S. 112.

giebigen Unterlage; der Auflagedruck wird proportional mit der Einsenkung angenommen; gesucht wird die Deformation der Mittelfläche. Bekanntlich ist das analoge Problem für die schwimmende kreisförmige Platte mit seiner Einzellast im Mittelpunkt bereits von H. Hertz[12]) gelöst. Die Behandlung unserer Aufgabe nach der Hertzschen Methode dürfte wohl mit großen Schwierigkeiten verbunden sein, während die Ritzsche Methode zum Ziel führt.

In der Ebene, in der sich die Mittelebene der Platte vor dem Auflegen der Einzellast P befindet, nehmen wir die xy-Ebene eines rechtwinkligen Koordinatensystems an; sein Ursprung falle in den Mittelpunkt und die x-Achse sei parallel zu den Seiten von der Länge $2a$, während die positive z-Achse nach unten verlaufe. Nach dem Auflegen der Einzellast sei $w(x, y)$ die Deformation der Mittelebene, d. h. ihr Abstand von der xy-Ebene.

Da der Auftrieb, der vor dem Auflegen der Einzellast vorhanden ist, equilibriert wird durch das Gewicht der Platte, so können wir von beiden absehen. Auf die Platte wirkt daher von unten her nur die Vermehrung des Auftriebs, die nach dem Auflegen der Einzellast eingetreten ist und die offenbar proportional mit w ist. Wir setzen daher die von unten her auf die Platte wirkende Kraft pro Flächeneinheit gleich λw, wobei λ eine Konstante ist. Offenbar ist λ identisch mit dem spezifischen Gewicht der Flüssigkeit. Befindet sich die Platte auf nachgiebiger Unterlage, so ist nach Voraussetzung die von unten her auf die Platte wirkende Kraft pro Flächeneinheit ebenfalls in der Form λw anzusetzen, wobei λ wieder eine Konstante ist. Von oben her wirkt nun die Einzellast P und diese befindet sich nur innerhalb des sehr kleinen den Mittelpunkt umgebenden Flächengebiets f; der auf die Flächeneinheit bezogene Druck an einer beliebigen Stelle innerhalb f sei p.

Sind wieder K und θ die Elastizitätskonstanten in Kirchhoffscher[13]) Bezeichnungsweise und ist $2h$ die Plattendicke, so hat w außerhalb f der Gleichung:

$$\frac{4}{3} K h^3 \frac{1+2\theta}{1+\theta} \Delta\Delta w + \lambda w = 0 \tag{15}$$

zu genügen, während im Mittelpunkt, da $\iint_f p\,dx\,dy = P$ ist, die Bedingung

$$\iint_f \left(\frac{4}{3} K h^3 \frac{1+2\theta}{1+\theta} \Delta\Delta w + \lambda w\right) dx\,dy = P \tag{16}$$

erfüllt sein muß. Am Rande hat w denselben beiden Differentialgleichungen

[12]) Vgl. H. Hertz, Gesammelte Werke, 1 (1895); S. 288, siehe auch Wiedem. Ann. d. Phys. u. Chemie, 22 (1884), S. 449.

[13]) G. Kirchhoff, Vorlesungen über Mechanik, 4. Aufl. (1897), S. 456.

genügen, die bei Platten mit freien Rändern in Betracht kommen.
e eben genannten Gleichungen und Randbedingungen gelten sowohl für
schwimmende Platte als auch für die Platte auf nachgiebiger Unterlage.
Bildet man das Potential der inneren Kräfte und fügt man dazu die
nme $-\iint_f p w\,dx\,dy + \frac{\lambda}{2}\iint_S w^2\,dx\,dy$, ($S$ bedeutet das Gebiet der
tte), so erhält man nach Kirchhoff den folgenden Ausdruck, den wir
Abkürzung mit W bezeichnen:

$$\frac{Kh^3}{2}\frac{1+2\theta}{1+\theta}\iint_S\left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2+2\frac{\theta}{1+2\theta}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+2\left(1-\frac{\theta}{1+2\theta}\right)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\right)^2\right]dx\,dy$$
$$-\iint_f p w\,dx\,dy+\frac{\lambda}{2}\iint_S w^2\,dx\,dy,$$

kann das Glied $\iint_f p w\,dx\,dy$ auch durch $\iint_S p w\,dx\,dy$ ersetzt werden,
p außerhalb von f gleich Null ist. Aus der Bedeutung von W und
d'Alembertschen Prinzip folgt, daß, wenn man in W die Funktion
variiert, also δW bildet, dieser Ausdruck verschwinden muß; d. h. es ist

$$\delta W = 0.$$

Da in unserem Fall am Rande wenigstens im allgemeinen $w \neq 0$ und
h $\frac{\partial w}{\partial n} \neq 0$ ist, so folgt für Punkte der Platte außerhalb f aus dem
tehen von (18) die Gültigkeit der Differentialgleichung (15) und der
i Randbedingungen, für das Gebiet f ergibt sich aus (17), mit Rück-
t auf $\iint_f p\,dx\,dy = P$, die Gültigkeit von (16). Die Relationen (15)
(16) sowie die Randbedingungen sind also in (18) enthalten und
brauchen daher die Funktion w nur so zu wählen, daß (18) erfüllt ist.

§ 5.

Es liegt sehr nahe, für die Funktion w eine Reihe von derselben
art anzusetzen, die Ritz[14]) bei einem Problem benutzt, das von dem
igen völlig verschieden ist, nämlich bei der Berechnung der Trans-
alschwingungen einer rechteckigen Platte mit freien Rändern. Wir
en:

$$w = A_{00}u_0v_0 + A_{02}u_0v_2 + A_{04}u_0v_4$$
$$+ A_{20}u_2v_0 + A_{22}u_2v_2 + A_{24}u_2v_4 + \ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

[14]) W. Ritz, Annalen d. Physik, 4. Folge, 28 (1909), S. 737.

Hierin sind die $A_{2m,2n}$ Konstanten; die u_{2n} sind Funktionen von x allein, die v_{2m} sind nur von y abhängig, und zwar ist:

$$u_0 = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$u_{2n} = \frac{\mathfrak{Cof}\, k_{2n} \cos\left(k_{2n}\frac{x}{a}\right) + \cos k_{2n}\, \mathfrak{Cof}\left(k_{2n}\frac{x}{a}\right)}{\sqrt{\mathfrak{Cof}^2 k_{2n} + \cos^2 k_{2n}}}, \tag{20}$$

wobei die k_{2n} die Wurzeln der Gleichung

$$\operatorname{tg} k_{2n} + \mathfrak{Tg}\, k_{2n} = 0 \tag{21}$$

sind. Die kleinste Wurzel dieser Gleichung ist $k_0 = 0$; wir ordnen sie u_0 zu. Die Funktionen $v_0, v_2, \ldots$ werden in derselben Weise definiert, nur ist überall y statt x und b statt a zu setzen. Die Funktionen u_{2n} bleiben, wie es sein muß, bei Vertauschung von $+x$ mit $-x$ ungeändert und dasselbe gilt für die Funktionen v_{2n} bei der Vertauschung $-y$ mit $+y$. Die Funktionen u_{2n} und v_{2n} genügen den Gleichungen:

$$\frac{d^4 u_{2n}}{dx^4} = \left(\frac{k_{2n}}{a}\right)^4 u_{2n}, \quad \frac{d^4 v_{2n}}{dy^4} = \left(\frac{k_{2n}}{b}\right)^4 v_{2n}, \tag{22}$$

$$\left(\frac{d^3 u_{2n}}{dx^3}\right)_{x=a} = \left(\frac{d^3 u_{2n}}{dx^3}\right)_{x=a} = \left(\frac{d^2 v_{2n}}{dy^2}\right)_{y=b} = \left(\frac{d^3 v_{2n}}{dy^3}\right)_{y=b} = 0,$$

welche bei den Transversalschwingungen eines Stabes mit freien Rändern auftreten. Die Konstanten $A_{2m,2n}$ sind so zu bestimmen, daß (18) erfüllt ist.

Die kleinste von Null verschiedene Wurzel von (21) ist $k_2 = 2{,}3650$, die weitern Wurzeln werden mit für unsere Zwecke vollkommenen genügender Genauigkeit dargestellt durch:

$$k_4 = (2 - \tfrac{1}{4})\pi = 5{,}4978, \quad k_6 = (3 - \tfrac{1}{4})\pi = 8{,}6394, \ldots, k_{2n} = (n - \tfrac{1}{4})\pi.$$

Die Wurzel k_4 differiert von ihrem Näherungswert $(2 - \frac{1}{4})\pi$ erst in der fünften Dezimalstelle.

§ 6.

Um die Konstante $A_{2m,2n}$ zu ermitteln, führen wir zunächst die Doppelreihe für w in den Ausdruck W ein. Hierbei treten die folgenden Integrale auf, deren Berechnung in analoger Weise wie bei Ritz geschieht:

$$\int_{-a}^{+a} u''_{2m} u''_{2n}\, dx = 0, \quad \begin{pmatrix} m = 0, 1, 2, 3, \ldots; n = 0, 1, 2, 3, \ldots \\ m \neq n \end{pmatrix}$$

$$\int_{-a}^{+a} u''^2_0\, dx = 0, \tag{23}$$

$$\int_{-a}^{+a} u''^2_{2n}\, dx = \frac{k^4_{2n}}{a^3}, \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots$$

$$= \int_{-a}^{+a} u''_{2m} u_{2n}\, dx = \frac{2 k_{2m}^4 \left[u'_{2m} u_{2n} - u_{2m} u'_{2n}\right]_{x=a}}{k_{2m}^4 - k_{2n}^4} \qquad \begin{pmatrix} m = 1, 2, 3, \ldots; n = 1, 2, 3, \ldots \\ m \neq n \end{pmatrix}$$

$$= \int_{-a}^{+a} u''_0 u_{2n}\, dx = 0, \qquad (n = 0, 1, 2, 3, \ldots)$$

$$= \int_{-a}^{+a} u''_{2m} u_0\, dx = \sqrt{2}\,[u'_{2m}]_{x=a}, \qquad (m = 1, 2, 3, \ldots)$$

$$= \int_{-a}^{+a} u''_{2n} u_{2n}\, dx = -\frac{k_{2n}^2 (\mathfrak{Cof}^2 k_{2n} - \cos^2 k_{2n})}{a (\mathfrak{Cof}^2 k_{2n} + \cos^2 k_{2n})} + 2 k_{2n} \frac{\cos^2 k_{2n}\, \mathfrak{Cof}^2 k_{2n}\, \mathfrak{Tg}\, k_{2n}}{a (\mathfrak{Cof}^2 k_{2n} + \cos^2 k_{2n})}, \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

$$= \int_{-a}^{+a} u'_{2m} u'_{2n}\, dx = \frac{2 [k_{2m}^4 u_{2m} u'_{2n} - k_{2n}^4 u_{2n} u'_{2m}]_{x=a}}{k_{2m}^4 - k_{2n}^4} \qquad \begin{pmatrix} m = 1, 2, 3, \ldots; n = 1, 2, 3, \ldots \\ m \neq n \end{pmatrix}$$

$$= \int_{-a}^{+a} u'_0 u'_{2n}\, dx = 0, \qquad (n = 0, 1, 2, 3, \ldots)$$

$$= \int_{-a}^{+a} u'_{2m} u'_0\, dx = 0, \qquad (m = 0, 1, 2, 3, \ldots)$$

$$= \int_{-a}^{+a} u'^2_{2n}\, dx = \frac{k_{2n}^2 (\mathfrak{Cof}^2 k_{2n} - \cos^2 k_{2n})}{a (\mathfrak{Cof}^2 k_{2n} + \cos^2 k_{2n})} + 6 k_{2n} \frac{\cos^2 k_{2n}\, \mathfrak{Cof}^2 k_{2n}\, \mathfrak{Tg}\, k_{2n}}{a (\mathfrak{Cof}^2 k_{2n} + \cos^2 k_{2n})}, \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

$$\int_{-a}^{+a} u_{2m} u_{2n}\, dx = 0, \qquad \begin{pmatrix} m = 0, 1, 2, 3, \ldots; n = 0, 1, 2, 3, \ldots \\ m \neq n \end{pmatrix}$$

$$\int_{-a}^{+a} u_{2n}^2\, dx = a, \qquad (n = 0, 1, 2, 3, \ldots)$$

Mit einer Genauigkeit von mindestens $\frac{3}{1000}$ hat man:

$$\left.\begin{aligned} (u_{2n})_{x=a} &= (-1)^n \sqrt{2}, \\ (u'_{2n})_{x=a} &= (-1)^n \sqrt{2}\, \frac{k_{2n}}{a}, \end{aligned}\right\} \qquad (n \geqq 2)$$

$$(u_2)_{x=a} = -1{,}414,$$

$$(u'_2)_{x=a} = -\frac{3{,}286}{a},$$

$$\omega^{(x)}_{2m,2n} = (-1)^{m+n} \frac{4 k_{2m}^4 [k_{2m} - k_{2n}]}{a (k_{2m}^4 - k_{2n}^4)}, \qquad (m \geqq 2,\ n \geqq 2,\ m \neq n)$$

$$\omega^{(x)}_{2,2n} = (-1)^n \frac{[-125{,}1\, k_{2n} + 290{,}7]}{a (k_{2n}^4 - 31{,}3)} \qquad (n \geqq 2)$$

$$\omega^{(x)}_{2m,2} = (-1)^m \frac{k_{2m}^4 [-4 k_{2m} + 9{,}293]}{a (k_{2m}^4 - 31{,}3)}, \qquad (m \geqq 2)$$

$$\omega^{(x)}_{20} = -\frac{4{,}65}{a},$$

$$\omega^{(x)}_{2m,0} = (-1)^m 2\,\frac{k_{2m}}{a}, \qquad (m \geqq 2$$

$$\omega^{(x)}_{2n,2n} = -\frac{k_{2n}^2}{a} + \frac{k_{2n}}{a}, \qquad (n \geqq 2$$

$$\omega^{(x)}_{2,2} = -\frac{3{,}07}{a},$$

$$\alpha^{(x)}_{2m,2n} = (-1)^{m+n}\frac{4\,[k_{2m}^4 k_{2n} - k_{2n}^4 k_{2m}]}{a\,(k_{2m}^4 - k_{2n}^4)}, \quad (m \geqq 2,\ n \geqq 2 \text{ und } m \neq n$$

$$\alpha^{(x)}_{2,2n} = \alpha_{2n,2} = (-1)^n \frac{[-k_{2n}^4\, 9{,}293 + 125{,}1\, k_{2n}]}{a\,(k_{2n}^4 - 31{,}3)}, \qquad (n \geqq 2$$

$$\alpha^{(x)}_{2n,2n} = \frac{k_{2n}^2}{a} + 3\,\frac{k_{2n}}{a}, \qquad (n \geqq 2$$

$$\alpha^{(x)}_{2,2} = +\frac{12.36}{a}.$$

In analoger Weise berechnen sich die entsprechenden Integrale, in denen die v_{2n} statt der u_{2n} auftreten. Für diese Integrale führen wir analoge Bezeichnungen ein, im besonderen setzen wir:

$$\omega^{(y)}_{2m,2n} = \int_{-b}^{+b} v''_{2m}\, v_{2n}\, dy, \qquad \alpha^{(y)}_{2m,2n} = \int_{-b}^{+b} v'_{2m}\, v'_{2n}\, dy.$$

In dem in W vorkommenden Integral $\int_f p\, w\, dx\, dy$ läßt sich beim Grenzüberganz, $f = 0$, w vor das Integralzeichen ziehen; man hat daher mit Rücksicht auf $\iint_f p\, dx\, dy = P$

$$(25) \qquad \int_f p\, w\, dx\, dy = P\,(A_{00}\, u_0\, v_0 + A_{02}\, u_0\, v_2 + A_{20}\, u_2\, v_0 + \ldots)_{\substack{x=0\\y=0}}.$$

Hier ist:

$$(26) \qquad \begin{aligned} (u_0)_{x=0} &= (v_0)_{x=0} = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0{,}7071, \\ (u_2)_{x=0} &= (v_2)_{x=0} = \frac{\mathfrak{Cof}\, k_2 + \cos k_2}{\sqrt{\mathfrak{Cof}^2\, k_2 + \cos^2 k_2}} = 0{,}860, \\ (u_4)_{x=0} &= (v_4)_{x=0} = \frac{\mathfrak{Cof}\, k_4 + \cos k_4}{\sqrt{\mathfrak{Cof}^2\, k_4 + \cos^2 k_4}} = 1{,}006, \\ (u_{2n})_{x=0} &= (v_{2n})_{x=0} = \frac{\mathfrak{Cof}\, k_{2n} + \cos k_{2n}}{\sqrt{\mathfrak{Cof}^2\, k_{2n} + \cos^2 k_{2n}}} = 1 \qquad (n \geqq 3) \end{aligned}$$

Setzt man zur Abkürzung

$$(27) \qquad \frac{\theta}{1+2\,\theta} = \mu$$

und beachtet man (5), so erhält man im Ausdruck W als Koeffizient von $A^2_{2m,2n}$:

$$\frac{q}{2}\left[\left(\frac{k_{2m}^4}{a^4}+\frac{k_{2n}^4}{b^4}\right)ab+2\mu\,\omega^{(x)}_{2m,2m}\,\omega^{(y)}_{2n,2n}+2(1-\mu)\alpha^{(x)}_{2m,2m}\,\alpha^{(y)}_{2n,2n}+\frac{}{q}ab\right]$$
$$=a^{(2m,2n)}_{2m,2n}$$

und als Koeffizient von $2A_{2m,2n}A_{2p,2q}$

$$\frac{q}{2}\left[\mu\left\{\omega^{(x)}_{2m,2p}\,\omega^{(y)}_{2q,2n}+\omega^{(x)}_{2p,2m}\,\omega^{(y)}_{2n,2q}\right\}+2(1-\mu)\alpha^{(x)}_{2m,2p}\,\alpha^{(y)}_{2n,2q}\right]=a^{(2p,2q)}_{2m,2n}.$$

ließlich treten in W noch Glieder auf, die linear in den $A_{2m,2n}$ sind, Koeffizienten ergeben sich ohne weiteres aus (25).

§ 7.

Die Gleichung (18), d. h. $\delta W=0$ ist äquivalent mit ∞^2 Gleichungen:

$$\frac{\partial W}{\partial A_{2m,2n}}=0 \qquad \begin{pmatrix} m=1,2,3,\ldots \\ n=1,2,3,\ldots \end{pmatrix},$$

denen die ∞^2 Konstanten $A_{2m,2n}$ zu bestimmen sind. Da sämtliche $_{2n}$ und $a^{(2p,2q)}_{00}$ verschwinden mit Ausnahme von $a^{(00)}_{00}$, so lauten die chungen (30), ausführlich geschrieben, folgendermaßen:

$$\begin{aligned}
&\tfrac{1}{2}Pu_0v_0 = a^{(00)}_{00}A_{00},\\
&\tfrac{1}{2}Pu_0v_2 = a^{(02)}_{02}A_{02}+a^{(02)}_{20}A_{20}+a^{(02)}_{22}A_{22}+a^{(02)}_{04}A_{04}+\ldots\\
&\tfrac{1}{2}Pu_2v_0 = a^{(20)}_{02}A_{02}+a^{(20)}_{20}A_{20}+a^{(20)}_{22}A_{22}+a^{(20)}_{04}A_{04}+\ldots\\
&\tfrac{1}{2}Pu_2v_2 = a^{(22)}_{02}A_{02}+a^{(22)}_{20}A_{20}+a^{(22)}_{22}A_{22}+a^{(22)}_{04}A_{04}+\ldots\\
&\ldots\ldots\ldots

$$0{,}356\,P = \frac{q}{2}\Big[-\mu\frac{51{,}1}{a^2}A_{02} + \mu\frac{61{,}1}{a^2}A_{22} + \Big(\frac{914}{a^2} + \frac{121}{a^2}\mu + \frac{\lambda a^2}{q}\Big)A_{04}$$
$$- \mu\frac{29{,}7}{a^2}A_{24} - \mu\frac{272}{a^2}A_{44}\Big] + \cdots$$

$$0{,}433\,P = \frac{q}{2}\Big[-\mu\frac{31{,}7}{a^2}A_{02} - \Big(\frac{218}{a^2} - \frac{260}{a^2}\mu\Big)A_{22} - \mu\frac{29{,}7}{a^2}A_{04}$$
(32)
$$+ \Big(\frac{2255}{a^2} - \frac{985}{a^2}\mu + \frac{\lambda a^2}{q}\Big)A_{24} - \Big(\frac{825}{a^2} - \frac{1160}{a^2}\mu\Big)A_{44}\Big] +$$

$$0{,}506\,P = \frac{q}{2}\Big[-\mu\frac{9{,}9}{a^2}A_{02} + \Big(\frac{156{,}2}{a^2} - \frac{144{,}3}{a^2}\mu\Big)A_{22} - \mu\frac{544}{a^2}A_{04}$$
$$- \Big(\frac{1650}{a^2} - \frac{2320}{a^2}\mu\Big)A_{24} + \Big(\frac{6187}{a^2} - \frac{3140}{a^2}\mu + \frac{\lambda a^2}{q}\Big)A_{44}\Big] +$$

Bedenkt man, daß μ ungefähr gleich 0,3 ist, so erkennt man wieder, daß auf der rechten Seite die Diagonalglieder alle andern übertreffen, ein Umstand, der schon von Ritz hervorgehoben wurde. Infolge dieses Umstandes lassen sich die Gleichungen (32) in der von Ritz angegebenen Weise sehr einfach lösen. Wir wollen hier die Auflösung für das folgende spezielle Beispiel geben. Eine quadratische Eisenplatte von der Seitenlänge $2a = 24$ cm und der Dicke $2h = 2$ cm liegt auf einem Boden und ist in der Mitte mit dem Gewicht P kg beschwert. Die Konstante λ habe den Wert 40 $\frac{\text{kg}}{\text{cm}^3}$; ferner ist für die Eisenplatte $\mu = 0{,}3$ und $q = 1{,}468 \cdot 10^6$ kg/cm. Durch Auflösung von (32) findet man:

$$A_{00} = \frac{86{,}8}{10^6}P, \quad A_{02} = A_{20} = \frac{1{,}590}{10^6}P, \quad A_{22} = \frac{0{,}261}{10^6}P,$$
$$A_{04} = A_{40} = \frac{0{,}098}{10^6}P, \quad A_{24} = A_{42} = \frac{0{,}078}{10^6}P, \quad A_{44} = \frac{0{,}032}{10^6}P.$$

Da $u_0 = v_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ist, so wird mithin:

$$(33)\quad w = \frac{P}{10^6}\{43{,}4 + 1{,}12\,(u_2 + v_2) + 0{,}26\,u_2 v_2 + 0{,}07\,(u_4 + v_4)$$
$$+ 0{,}08\,(u_2 v_4 + u_4 v_2) + 0{,}03\,u_4 v_4\}.$$

Damit ist die Deformation der Platte berechnet.

Denken wir uns eine kreisförmige Platte, die ebenfalls auf nachgiebiger Unterlage ruht und in ihrer Mitte mit dem Gewicht P belastet ist. Haben für diese Platte die Konstanten h, μ, q, λ und P die gleichen Werte wie für die eben betrachtete quadratische Platte, so ist zu erwarten, daß für beide Platten die Einsenkung im Mittelpunkt ungefähr gleich groß ist, vorausgesetzt, daß die Flächen beider Platten ungefähr gleich groß sind und also der Durchmesser der kreisförmigen Platte etwas größer ist als die Seitenlänge der quadratischen. Daß dies in der Tat zutrifft, davon kann man sich leicht überzeugen. Nimmt man den Radius der

isförmigen Platte zu 13,84 cm an und berechnet man die Einsenkung w_0 Mittelpunkt in der von Föppl[15]) angegebenen Weise, so ergibt sich rfür:

$$w_0 = 43{,}7\,\frac{P}{10^6},$$

hrend nach (33) für die quadratische Platte

$$w_0 = 45{,}8\,\frac{P}{10^6}$$

gt.

§ 8.

Wir nahmen bisher an, daß die Einzellast im Mittelpunkt unserer tte auflagert. Befindet sich dagegen bei unserer rechteckigen Platte Einzellast an einer beliebigen Stelle, so hat man für die gesuchte ormation w einen etwas allgemeineren Ansatz zu machen. Wir setzen:

$$\begin{aligned} w = {} & A_{00}u_0v_0 + A_{01}u_0v_1 + A_{02}u_0v_2 + \dots \\ & + A_{10}u_1v_0 + A_{11}u_1v_1 + A_{12}u_1v_2 + \dots \\ & + A_{20}u_2v_0 + A_{21}u_2v_1 + A_{22}u_2v_2 + \dots \\ & \dots\dots\dots\dots\dots \end{aligned}$$

rbei ist für gerade $n \geqq 2$

$$u_n = \frac{\mathfrak{Cof}\,k_n \cos\left(k_n\frac{x}{a}\right) + \cos k_n\,\mathfrak{Cof}\left(k_n\frac{x}{a}\right)}{\sqrt{\mathfrak{Cof}^2 k_n + \cos^2 k_n}}$$

die Konstante k_n bestimmt sich aus der Gleichung

$$\operatorname{tg} k_n + \mathfrak{Tg}\,k_n = 0, \qquad k_2 = 2{,}3650, \dots$$

ungerade $n \geqq 3$ dagegen soll sein:

$$u_n = \frac{\mathfrak{Sin}\,k_n \sin\left(k_n\frac{x}{a}\right) + \sin k_n\,\mathfrak{Sin}\left(k_n\frac{x}{a}\right)}{\sqrt{\mathfrak{Sin}^2 k_n - \sin^2 k_n}}$$

$$\operatorname{tg} k_n - \mathfrak{Tg}\,k_n = 0, \qquad k_3 = 3{,}9266, \dots$$

er ist

$$u_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad k_0 = 0$$

$$u_1 = \sqrt{\frac{3}{2}}\,\frac{x}{a}, \qquad k_1 = 0.$$

Funktionen v, die nur von y abhängen, werden in analoger Weise

[15]) Föppl, loc cit. Für die von Föppl mit l, c_4, c_1 und c_2 bezeichneten Werte sich: $l = 13{,}84$ cm, $c_4 = 0{,}375\,\frac{P}{10^6}$, $c_1 = 3{,}16\,\frac{P}{10^6}$, $c_2 = -0{,}23\,\frac{P}{10^6}$.

definiert. Die Bestimmung der Konstanten A_{mn} geschieht in analoger Weise wie früher.

Es bietet keine Schwierigkeit, nun auch die Deformation einer kreisförmigen Platte auf nachgiebiger Unterlage nach der Ritzschen Methode zu behandeln. Der Radius der Platte sei R, und die Einzellast, als das Gewicht P, möge sich im Mittelpunkt befinden, so wie dies auch Föppl annimmt. Als Koordinatenursprung wählen wir denjenigen Punkt in dem sich der Mittelpunkt der Mittelfläche der Platte im unbelasteten Zustande befindet und im übrigen legen wir das Koordinatensystem s wie bei der rechteckigen Platte. Entwickelt man die Deformation w de Mittelfläche nach Potenzen von x und y und berücksichtigt man die der Problem zukommenden Symmetrieeigenschaften, sowie daß w offenbar nu von $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ abhängig sein kann, so ergibt sich der Ansatz:

$$w = a + br^2 + cr^4 + \ldots, \tag{39}$$

wobei die $a, b, c, \ldots$ Konstanten sind.

Diese Konstanten lassen sich in analoger Weise wie bei der rechteckigen Platte bestimmen. Betrachtet man wieder die schon in § 7 e wähnte kreisförmige Platte, bei der mithin die Konstanten λ, h, q und dieselben Werte haben wie bei unserer quadratischen Platte und bei de der Radius $R = 13{,}84$ cm ist, so ergibt sich, falls man in (39) di Glieder mit $r^4, \ldots$ vernachlässigt und also

$$w = a + br^2$$

setzt:

$$a = \frac{42{,}5}{10^6} P, \quad b = -\frac{0{,}010}{10^6} P, \quad w = \frac{42{,}5}{10^6} P - \frac{0{,}010}{10^6} r^2 P \tag{40}$$

Für die Einsenkung w_0 im Mittelpunkt ergibt sich

$$w_0 = \frac{42{,}5}{10^6} P,$$

was mit (34) nahezu übereinstimmt; die kleine Abweichung erklärt sich durch die Vernachlässigung der Glieder mit $r^4, r^6, \ldots$ in w. Für eine genaue Berechnung von w würden die ersten dieser Glieder noch in Betracht kommen.

Befindet sich bei der kreisförmigen Platte das Gewicht P nicht im Mittelpunkt, sondern an einer beliebigen Stelle, so wählen wir das Koordinatensystem wieder so wie eben, jedoch möge die zx-Ebene durch den Punkt gehen, in dem die Last P auflagert. In der Entwickelung von w nach Potenzen von x und y fallen jetzt alle Glieder fort, die ungerade Potenzen von y enthalten. Die Ermittelung der Konstanten geschieht wieder in bekannter Weise.

(Eingegangen im März 1919.)

Ein Satz über die Abelschen Integrale 1. Gattung.

Von

Otto Haupt in Rostock.

Einleitung.

In einer früheren Arbeit[1]) habe ich einige Fragestellungen skizziert, die sich unter anderem auf gewisse Eindeutigkeitssätze bei Prymschen Funktionen 1. Ordnung beziehen. Ich bin infolge des Krieges bisher an der Verfolgung und Darstellung dieser Untersuchungen gehindert worden. Daher will ich zunächst nur auf einen Spezialfall eingehen, der auch für sich allein nicht ohne Interesse zu sein scheint und der verhältnismäßig einfach zu erledigen ist.

Die folgende Untersuchung dürfte zugleich einen kleinen Beitrag liefern zu Fragen, die Herr Klein in seinen Vorlesungen über die Riemannschen Flächen[2]) aufgeworfen hat. Herr Klein bezeichnet es an genannter Stelle als „eine wichtige Aufgabe: sich die Gesamtheit der hier möglichen Figuren" [d. h. eben der Riemannschen Parallelogrammfiguren] „deutlich zu machen" und fügt hinzu: „Kein Zweifel, daß hieraus wieder neue Sätze über das Verhalten der Integrale w auf der Riemannschen Fläche hervorgehen würden." Vielleicht kann der im § 10 mitgeteilte Satz als hierhergehörig betrachtet werden. Ferner erscheint es nicht ausgeschlossen, daß mittels der (unten zu gewinnenden) Reduktion des Periodensystems Abelscher Integrale 1. Gattung auf Normalformen jene von Herrn Klein formulierte Aufgabe sich, auf einem anderen als dem von Herrn Wirtinger[3]) eingeschlagenen Wege, einer Behandlung zugänglich erweist.

---

[1]) Math. Annalen, 77 (1915), S. 61.

[2]) Leipzig 1906; I. (W. S. 1891/92), S. 76.

[3]) Wirtinger, Wiener Denkschriften, 85 (1910), S. 91—112.

§ 1.

Problemstellung.

Es handelt sich um folgendes: Gegeben sei eine der komplexen z-Ebene überlagerte, *nicht zerfallende*[4]), zu einer algebraischen Funktion vom Geschlechte p gehörige Riemannsche Fläche T und es sei T durch p Rückkehrschnittpaare a_ν, b_ν $(\nu = 1, \ldots, p)$ kanonisch zerschnitten; die zerschnittene Fläche T werde mit T' bezeichnet. Auf T existiert bekanntlich ein und nur ein Abelsches Integral 1. Gattung, welches an einer bestimmten Stelle im Innern von T' verschwindet und dessen Perioden $\mathfrak{B}_\nu$ an den Schnitten b_ν $(\nu = 1, \ldots, p)$ vorgegebene Größen sind. Die Perioden $\mathfrak{A}_\nu$ an den Schnitten a_ν sind durch die $\mathfrak{B}_\nu$, die Individualität von T und, was für das Folgende wesentlich ist, in gewisser Weise auch durch die Wahl des kanonischen Schnittsystems a_ν, b_ν $(\nu = 1, \ldots, p)$ auf T festgelegt. Dabei gilt die Ungleichung

$$(\mathrm{I}) \qquad h^2 = i \sum_{\nu=1}^{p} (\mathfrak{A}_\nu \bar{\mathfrak{B}}_\nu - \bar{\mathfrak{A}}_\nu \mathfrak{B}_\nu) > 0,$$

wo die $\bar{\mathfrak{A}}_\nu, \bar{\mathfrak{B}}_\nu$ die zu $\mathfrak{A}_\nu, \mathfrak{B}_\nu$ konjugiert komplexen Größen bezeichnen und h eine reelle Zahl ist.

Die Ungleichung (I) liefert somit bei gegebenen Werten $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \ldots, \mathfrak{B}_p$ eine *notwendige* Beschränkung für die Variabilität der $\mathfrak{A}_\nu$. Damit ist die Frage nahegelegt[5]), ob diese Beschränkung auch hinreicht, um die Existenz eines Abelschen Integrals 1. Gattung zu garantieren, d. h. ob [bei festgehaltenen Werten von $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \ldots, \mathfrak{B}_p$] zu *jedem* mit (I) verträglichen Wertesystem $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_p$ ein Integral 1. Gattung vom Geschlechte p existiert, welches bei passender Zerschneidung der Fläche T die Größen $\mathfrak{A}_\nu, \mathfrak{B}_\nu$ $(\nu = 1, 2, \ldots, p)$ zu Perioden hat.

Wie nachstehend gezeigt werden soll, läßt sich diese Frage ganz elementar entscheiden und zwar durch *unmittelbare Konstruktion von Flächen T des Geschlechtes p, für welches ein Integral 1. Gattung existiert, das ein der Bedingung* (I) *genügendes, im übrigen — von einer gewissen Ausnahme abgesehen — beliebig vorgegebenes System von $2p$ (komplexen) Größen $\mathfrak{A}_\nu, \mathfrak{B}_\nu$ $(\nu = 1, \ldots, p)$ als Periodensystem besitzt.*

Der im folgenden zu beweisende Satz lautet:

Damit ein gegebenes System von $2p$ (komplexen) Konstanten $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_p$; $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \ldots, \mathfrak{B}_p$ als Periodensystem eines Abelschen

[4]) Diese Voraussetzung wird im folgenden stets gemacht, soweit nicht ausdrücklich das Gegenteil bemerkt wird.

[5]) Diese Frage scheint bisher, wenigstens in dieser Fassung, nicht gestellt und behandelt worden zu sein.

tegrals 1. Gattung vom Geschlechte p auftreten kann, ist notwendig d hinreichend, daß die Konstanten der Bedingung (I) genügen; ausnommen ist lediglich der Fall, daß für $p \geqq 2$ das vorgegebene Periodenstem der $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{B}_p$ einem Periodensysteme „äquivalent“[6]) ist [d. h. rch gewisse lineare Substitutionen in ein solches sich überführen läßt], r welches sämtliche Größen $\mathfrak{A}_\nu, \mathfrak{B}_\nu$ mit Ausnahme eines einzigen Paares, B. $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{B}_1$, verschwinden. In diesem Ausnahmefall existiert ein Integral Gattung vom Geschlechte $p \geqq 2$ mit den vorgegebenen Perioden nicht“[7]).

Ob ein solcher Ausnahmefall vorliegt, läßt sich in jedem konkreten ll durch eine endliche Anzahl von Operationen entscheiden[8]).

Für $p = 1$ ist die Richtigkeit des Satzes evident; für $p \geqq 2$ ist für wisse spezielle Arten von Periodensystemen die Existenz zugehöriger ächen T' bzw. Abelscher Integrale bereits erwiesen[9]). Im folgenden rd stets $p \geqq 2$ vorausgesetzt.

§ 2.

Gedankengang des Beweises.

Wie bereits angedeutet, geht man beim Beweise des eben formulierten tzes zunächst darauf aus, zu vorgegebenen Größen $\mathfrak{A}_\nu, \mathfrak{B}_\nu$ $(\nu = 1, \ldots, p)$ ne zugehörige *„Riemannsche Parallelogrammfigur“* (kurz *„Fläche N“* nannt[10])) zu konstruieren. Man versteht darunter ein Gebiet, das, einer omplexen) w-Ebene mehrblättrig überlagert, von p getrennt verlaufen- n, orientierten[11]) *„parallelogrammatischen Rahmen“*[12]) mit den $\mathfrak{A}_\nu, \mathfrak{B}_\nu$ s zugehörigen Verschiebungsgrößen begrenzt wird und den unendlich nen Punkt der w-Ebene nicht überdeckt; außerdem soll N in seinem nern (oder auf der Begrenzung) $(2p - 2)$ einfache Verzweigungspunkte elativ zur w-Ebene) enthalten. N ist von p-fachem Zusammenhang. rmittelst der Fläche N findet man sodann das gesuchte Integral 1. Gattung.

---

[6]) Bezüglich des Begriffes der „Äquivalenz“ vgl. § 2 vorliegender Arbeit.

[7]) Bezüglich dieses Ausnahmefalles vgl. § 10 dieser Arbeit. Die Feststellung, daß rartige Integrale, von den elliptischen abgesehen, nicht existieren, scheint bisher ht gemacht zu sein.

[8]) Vgl. § 10 dieser Arbeit.

[9]) Vgl. hierzu vor allem Klein, l. c. [2]), S. 74—76, ferner Wirtinger, l. c. [3]) wie Enzyklopädie d. math. Wiss., II B 6 (Abelsche Funktionen und allgemeine etafunktionen) und die daselbst zitierte Literatur.

[10]) Die Bezeichnung nach Klein, l. c. [2]), S. 73, vgl. auch Koebe, Unif. d. algebr. rven IV (Math. Ann., 75, 1914, S. 78).

[11]) D. h. mit Umlaufsinn versehen (vgl. etwa die in Fußnote [1]) zitierte Arbeit, 28). Das *„Innere“* des von dem Rahmen begrenzten Gebietes liegt bei positiver rchlaufung der Begrenzung zur Linken.

[12]) Klein, l. c. [2]), S. 73.

Im allgemeinen ist, wie man auch die Verzweigungspunkte wähle mag, die Begrenzung der Flächen N komplizierter Natur[13]). Dagegen läßt sich, wie im § 9 dieser Arbeit noch gezeigt wird, leicht eine Parallelo grammfigur N konstruieren, wenn für das vorgegebene Periodensystem [wobei natürlich stets von dem im Satze des § 1 aufgeführten Ausnahme fall abgesehen wird] anstatt der Ungleichung (I) die folgenden stärkere Bedingungen gelten:

$$(\mathrm{I}_\varkappa) \qquad i(\mathfrak{A}_\varkappa \overline{\mathfrak{B}}_\nu - \overline{\mathfrak{A}}_\varkappa \mathfrak{B}_\varkappa) > 0, \quad \varkappa = 1, \ldots, \varrho,$$

$$(\mathrm{I}_\lambda) \qquad i(\mathfrak{A}_\lambda \overline{\mathfrak{B}}_\lambda - \overline{\mathfrak{A}}_\lambda \mathfrak{B}_\lambda) = 0, \quad \lambda = \varrho + 1, \varrho + 2, \ldots, p,$$

$$(1 \leqq \varrho \leqq p).$$

Geometrisch gesprochen besitzt ein solches Periodensystem die Eigen schaft, daß die (orientierten) *„Periodenparallelogramme" lediglich entt weder positiven oder verschwindenden Flächeninhalt besitzen.* Von jedem derartigen Periodensystem sagt man, es besitze *„Normalform"*; die *An zahl ϱ der Parallelogramme positiven Inhaltes* heiße *die „Ordnung der Normalform"*[14]).

Das nächste Ziel der folgenden Untersuchung wird demgemäß sein jedes vorgegebene, der Bedingung (I) genügende System von $2p$ Perioden $\mathfrak{A}_\nu$, $\mathfrak{B}_\nu$ $(\nu = 1, \ldots, p)$ auf eine Normalform zu bringen. Man erreicht dies durch eine geeignete automorphe[15]) ganzzahlige Transformation der Hermiteschen Form

$$H = i \sum_{\nu=1}^{p} (\mathfrak{A}_\nu \overline{\mathfrak{B}}_\nu - \overline{\mathfrak{A}}_\nu \mathfrak{B}_\nu)$$

in den Variablen $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_p$; $\mathfrak{B}_1, \ldots, \mathfrak{B}_p$. Zwecks kürzerer Ausdrucksweise nenne man zwei Größensysteme $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_p$; $\mathfrak{B}_1, \ldots, \mathfrak{B}_p$ und $\mathfrak{A}'_1, \ldots, \mathfrak{A}'_p$; $\mathfrak{B}'_1, \ldots, \mathfrak{B}'_p$ *„äquivalent"*, wenn das eine aus dem andern durch eine derartige (automorphe und ganzzahlige) Transformation hervorgeht.

In zweiter Linie wird dann, wie bereits bemerkt, gezeigt, daß jedes in einer Normalform auftretende Größensystem $\mathfrak{A}_\nu$, $\mathfrak{B}_\nu$ $(\nu = 1, 2, \ldots, p)$ die Perioden eines Integrals 1. Gattung vom Geschlechte p an den Querschnitten a_ν, b_ν (mindestens) einer Riemannschen Fläche T bildet. Und ein gleiches gilt nunmehr auch für jedes äquivalente Größensystem; denn die automorphen Transformationen sind nichts anderes, als die „ganzzahligen linearen" Transformationen der Perioden und mithin gleich-

[13]) Vgl. die Bemerkungen bei Klein, l. c. [2]), S. 76—77.

[14]) Vgl. hierzu die Erörterungen in § 7 vorliegender Arbeit.

[15]) Die Bezeichnung nach Löwy, Determinanten usw. (Pascals Repertorium I, 1, Leipzig 1910, S. 136).

bedeutend lediglich mit Änderungen des Querschnittsystems auf der Fläche T [16]).

Zusatz: Die Bemerkungen betreffend die Transformation der Perioden haben zur Voraussetzung, daß die Fläche T nicht (in getrennte Bestandteile) zerfällt. Die in letzterem Falle eintretenden Modifikationen sind leicht zu übersehen.

§ 3.

Betrachtung einer speziellen Transformation der Perioden.

Bekanntlich[17]) läßt sich jede der in Rede stehenden Transformationen aus gewissen einfachen erzeugen; als solche Erzeugende können die folgenden gewählt werden:

$$(1)\quad \begin{cases} \mathfrak{A}_1' = \mathfrak{A}_1 + \mathfrak{B}_1, & \mathfrak{A}_\nu' = \mathfrak{A}_\nu, \\ \mathfrak{B}_1' = \mathfrak{B}_1, & \mathfrak{B}_\nu' = \mathfrak{B}_\nu, \end{cases} \quad \nu = 2, 3, \ldots, p;$$

$$(2)\quad \begin{cases} \mathfrak{A}_1' = -\mathfrak{B}_1, & \mathfrak{A}_\nu' = \mathfrak{A}_\nu, \\ \mathfrak{B}_1' = \mathfrak{A}_1, & \mathfrak{B}_\nu' = \mathfrak{B}_\nu, \end{cases} \quad \nu = 2, 3, \ldots, p;$$

$$(3)\quad \begin{cases} \mathfrak{A}_1' = \mathfrak{A}_\mu, & \mathfrak{A}_\mu' = \mathfrak{A}_1, & \mathfrak{A}_\nu' = \mathfrak{A}_\nu, \\ \mathfrak{B}_1' = \mathfrak{B}_\mu, & \mathfrak{B}_\mu' = \mathfrak{B}_1, & \mathfrak{B}_\nu' = \mathfrak{B}_\nu, \end{cases} \quad \nu = 2, \ldots, \mu-1, \mu+1, \ldots, p;$$

$$(4)\quad \begin{cases} \mathfrak{A}_1' = \mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}_2, & \mathfrak{A}_2' = \mathfrak{A}_2, & \mathfrak{A}_\nu' = \mathfrak{A}_\nu, \\ \mathfrak{B}_1' = \mathfrak{B}_1, & \mathfrak{B}_2' = \mathfrak{B}_2 - \mathfrak{B}_1, & \mathfrak{B}_\nu' = \mathfrak{B}_\nu, \end{cases} \quad \nu = 3, \ldots, p.$$

Dabei bedeuten $\mathfrak{A}_\lambda$, $\mathfrak{B}_\lambda$ $(\lambda = 1, \ldots, p)$ die ursprünglichen, $\mathfrak{A}_\lambda'$, $\mathfrak{B}_\lambda'$ die transformierten Perioden. Man kann also insbesondere irgendwelche unter den gegebenen Periodenpaaren herausgreifen und diese herausgegriffenen für sich transformieren, während die übrigen Paare unverändert bleiben.

Man führe noch folgende *Abkürzungen* ein

$$i(\mathfrak{A}_\lambda \overline{\mathfrak{A}}_\varkappa - \overline{\mathfrak{A}}_\lambda \mathfrak{A}_\varkappa) = (\mathfrak{A}_\lambda \overline{\mathfrak{A}}_\varkappa),$$
$$i(\mathfrak{B}_\lambda \overline{\mathfrak{B}}_\varkappa - \overline{\mathfrak{B}}_\lambda \mathfrak{B}_\varkappa) = (\mathfrak{B}_\lambda \overline{\mathfrak{B}}_\varkappa),$$
$$i(\mathfrak{A}_\lambda \overline{\mathfrak{B}}_\varkappa - \overline{\mathfrak{A}}_\lambda \mathfrak{B}_\varkappa) = (\mathfrak{A}_\lambda \overline{\mathfrak{B}}_\varkappa),$$

so daß also allgemein $(\mathfrak{A}\overline{\mathfrak{B}}) = -(\mathfrak{B}\overline{\mathfrak{A}})$, $(\mathfrak{A}\overline{\mathfrak{A}}) = 0$ ist.

Ist nun ein *Periodensystem* $\mathfrak{A}_\lambda$, $\mathfrak{B}_\lambda$ $(\lambda = 1, \ldots, p)$ *gegeben, welches die Bedingungen* (I) *erfüllt und nicht schon in einer Normalform sich*

[16]) Vgl. Krazer, Lehrbuch der Thetafunktionen (Leipzig 1903, S. 131 u. 449); auch Stahl, Abelsche Funktionen (Leipzig 1896, S. 327).

[17]) Stahl, l. c. [16]), S. 328.

befindet, so scheide man zunächst alle Periodenpaare aus, für die $(\mathfrak{A}_\lambda \overline{\mathfrak{B}}_\lambda) = 0$ ist und gebe ihnen (Transformation (3)) die Indizes $\varrho+1, \varrho+2, \ldots, p$.

Für die übrigen Periodenpaare müssen dann alle $\mathfrak{A}_\mu$ und $\mathfrak{B}_\mu$ $(\mu = 1, \ldots, \varrho$ von Null verschieden sein; überdies aber können für sie *die sämtlichen* (*reellen*) *Größen* $(\mathfrak{A}_\mu \overline{\mathfrak{A}}_\nu)$, $(\mathfrak{A}_\mu \overline{\mathfrak{B}}_\nu)$, $(\mathfrak{B}_\mu \overline{\mathfrak{B}}_\nu)$ $[\mu, \nu = 1, \ldots, \varrho;\ \mu \neq \nu]$ *als von Null verschieden angenommen werden*. Daß diese Behauptung richtig ist, sieht man folgendermaßen ein: Es gelten vermöge der Transformation (1)

$$\mathfrak{A}_1' = \mathfrak{A}_1 + l\mathfrak{B}_1, \quad \mathfrak{B}_1' = \mathfrak{B}_1, \quad \mathfrak{A}_\nu' = \mathfrak{A}_\nu, \quad \mathfrak{B}_\nu' = \mathfrak{B}_\nu, \quad \nu = 2, 3, \ldots, \varrho,$$

woselbst l eine ganze rationale, sonst beliebige Zahl bedeutet, die Beziehungen

$$(\mathfrak{A}_1' \overline{\mathfrak{A}}_\mu') = (\mathfrak{A}_1 \overline{\mathfrak{A}}_\mu) + l(\mathfrak{B}_1 \overline{\mathfrak{A}}_\mu), \quad (\mathfrak{A}_1' \overline{\mathfrak{B}}_\mu') = (\mathfrak{A}_1 \overline{\mathfrak{B}}_\mu) + l(\mathfrak{B}_1 \overline{\mathfrak{B}}_\mu), \quad \mu = 2, \ldots$$

während im übrigen

$$\left.\begin{aligned} &(\mathfrak{A}_1' \overline{\mathfrak{B}}_1') = (\mathfrak{A}_1 \overline{\mathfrak{B}}_1), \quad (\mathfrak{B}_1' \overline{\mathfrak{A}}_\mu') = (\mathfrak{B}_1 \overline{\mathfrak{A}}_\mu), \quad (\mathfrak{A}_\mu' \overline{\mathfrak{B}}_\nu') = (\mathfrak{A}_\mu \overline{\mathfrak{B}}_\nu), \\ &(\mathfrak{B}_1' \overline{\mathfrak{B}}_\mu') = (\mathfrak{B}_1 \overline{\mathfrak{B}}_\mu), \quad (\mathfrak{B}_\mu' \overline{\mathfrak{B}}_\nu') = (\mathfrak{B}_\mu \overline{\mathfrak{B}}_\nu), \\ &(\mathfrak{A}_\mu' \overline{\mathfrak{A}}_\nu') = (\mathfrak{A}_\mu \overline{\mathfrak{A}}_\nu), \end{aligned}\right\} \quad \mu, \nu = 2, 3, \ldots$$

Die Periodenpaare $\mathfrak{A}_\nu', \mathfrak{B}_\nu'$ $(\nu = \varrho+1, \ldots, p)$ bleiben, wie bereits bemerkt, vorläufig außer Betracht. Wegen $(\mathfrak{A}_\lambda' \overline{\mathfrak{B}}_\lambda') = (\mathfrak{A}_\lambda \overline{\mathfrak{B}}_\lambda) \neq 0$ $(\lambda = 1, \ldots, \varrho)$ dürfen $(\mathfrak{A}_1 \overline{\mathfrak{B}}_\mu)$ und $(\mathfrak{B}_1 \overline{\mathfrak{B}}_\mu)$ [bzw. $(\mathfrak{A}_1 \overline{\mathfrak{A}}_\mu)$ und $(\mathfrak{B}_1 \overline{\mathfrak{A}}_\mu)$] $(\mu = 2, 3, \ldots, \varrho)$ nicht gleichzeitig verschwinden. Infolgedessen kann die ganze Zahl l stets so bestimmt werden, daß $(\mathfrak{A}_1' \overline{\mathfrak{B}}_\mu') \neq 0$ und $(\mathfrak{A}_1' \overline{\mathfrak{A}}_\mu') \neq 0$ werden $(\mu = 2, \ldots, \varrho)$. Wird das so erhaltene System der $\mathfrak{A}_\lambda'$, $\mathfrak{B}_\lambda'$ wiederum mit $\mathfrak{A}_\lambda$, $\mathfrak{B}_\lambda$ $(\lambda = 1, \ldots, \varrho$ bezeichnet, so lassen sich in gleicher Weise und ohne Änderung von $(\mathfrak{A}_1 \overline{\mathfrak{A}}_\mu)$, $(\mathfrak{A}_1 \overline{\mathfrak{B}}_\mu)$, $(\mathfrak{A}_\mu \overline{\mathfrak{A}}_\nu)$ usw. auch die $(\mathfrak{B}_1 \overline{\mathfrak{A}}_\mu)$, $(\mathfrak{B}_1 \overline{\mathfrak{B}}_\mu)$ von Null verschieden machen. Und ebenso verfährt man dann sukzessive für die Periodenpaare $\mathfrak{A}_2, \mathfrak{B}_2$ usw.

Unter diesen Annahmen betrachte man zunächst die Periodenpaare $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{B}_1$ und $\mathfrak{A}_2, \mathfrak{B}_2$ und transformiere sie wie folgt (Transf. (2) und (4))

$$(4') \qquad \begin{aligned} \mathfrak{A}_1' &= -\mathfrak{B}_1, & \mathfrak{A}_2' &= -\mathfrak{B}_2 + m\mathfrak{B}_1, \\ \mathfrak{B}_1' &= \mathfrak{A}_1 + n\mathfrak{A}_2 + m\mathfrak{B}_2 - mn\mathfrak{B}_1, & \mathfrak{B}_2' &= \mathfrak{A}_2 + m\mathfrak{B}_1, \end{aligned}$$

wo m und n ganze rationale, im übrigen beliebige Zahlen sind; alle übrigen $\mathfrak{A}_\mu$, $\mathfrak{B}_\mu$ $(\mu = 3, 4, \ldots, \varrho)$ sollen unverändert bleiben.

Vermöge (4′) gilt dann weiter:

$$(\mathfrak{A}_1' \overline{\mathfrak{B}}_1') = (\mathfrak{A}_1 \overline{\mathfrak{B}}_1) + n(\mathfrak{A}_2 \overline{\mathfrak{B}}_1) + m(\mathfrak{B}_2 \overline{\mathfrak{B}}_1),$$
$$(\mathfrak{A}_2' \overline{\mathfrak{B}}_2') = (\mathfrak{A}_2 \overline{\mathfrak{B}}_2) - n(\mathfrak{A}_2 \overline{\mathfrak{B}}_1) - m(\mathfrak{B}_2 \overline{\mathfrak{B}}_1),$$
$$(\mathfrak{A}_2' \overline{\mathfrak{A}}_1') = (\mathfrak{B}_2 \overline{\mathfrak{B}}_1),$$

$$(\mathfrak{B}_2'\overline{\mathfrak{A}}_1') = -(\mathfrak{A}_2\overline{\mathfrak{B}}_1),$$
$$(\mathfrak{A}_2'\overline{\mathfrak{B}}_1') = -n[(\mathfrak{A}_1\overline{\mathfrak{B}}_1) - (\mathfrak{A}_2\overline{\mathfrak{B}}_2)] - n^2(\mathfrak{A}_2\overline{\mathfrak{B}}_1) - (\mathfrak{B}_2\overline{\mathfrak{A}}_1),$$
$$(\mathfrak{B}_2'\overline{\mathfrak{B}}_1') = -m[(\mathfrak{A}_1\overline{\mathfrak{B}}_1) - (\mathfrak{A}_2\overline{\mathfrak{B}}_2)] - 2mn(\mathfrak{A}_2\overline{\mathfrak{B}}_1) - m^2(\mathfrak{B}_2\overline{\mathfrak{B}}_1) + (\mathfrak{A}_2\overline{\mathfrak{A}}).$$

§ 4.

Fallunterscheidung.

Nun sind die folgenden Möglichkeiten vorhanden:

A. *Die reellen, von Null verschiedenen Größen* $(\mathfrak{A}_2\overline{\mathfrak{B}}_1)$ *und* $(\mathfrak{B}_2\overline{\mathfrak{B}}_1)$ *stehen in irrationalem Verhältnisse.* Dann lassen sich die ganzen rationalen Zahlen m und n so bestimmen, daß $(\mathfrak{A}_1'\overline{\mathfrak{B}}_1')$ positiv und kleiner als eine beliebig vorgegebene positive Zahl ε wird. Wählt man $\varepsilon < h^2$ [vgl. (I)], so gilt

$$\sum_{\nu=2}^{\varrho}(\mathfrak{A}_\nu'\overline{\mathfrak{B}}_\nu') > 0.$$

Infolgedessen genügt es zur Erreichung des hier in Betracht kommenden Zweckes — d. i. Transformation des vorgegebenen Periodensystems auf die Normalform — unter Weglassung von $\mathfrak{A}_1'$, $\mathfrak{B}_1'$ das Periodensystem $\mathfrak{A}_2', \mathfrak{B}_2', \ldots, \mathfrak{A}_\varrho', \mathfrak{B}_\varrho'$ weiter zu reduzieren, wobei man wiederum entweder auf den genannten Fall A oder auf den nun zu behandelnden Fall B geführt wird.

B. *Die Quotienten* $(\mathfrak{A}_2\overline{\mathfrak{B}}_1):(\mathfrak{B}_2\overline{\mathfrak{B}}_1)$, $(\mathfrak{B}_2\overline{\mathfrak{B}}_1):(\mathfrak{B}_2\overline{\mathfrak{A}}_1)$, $(\mathfrak{B}_2\overline{\mathfrak{A}}_1):(\mathfrak{A}_2\overline{\mathfrak{A}}_1)$ sowie $(\mathfrak{A}_2\overline{\mathfrak{A}}_1):(\mathfrak{A}_2\overline{\mathfrak{B}}_1)$ *sind sämtlich rational.* Vermöge der Transformationen (2) und (3) kann nämlich jeder dieser Quotienten in der unter A angegebenen Weise zur Reduktion verwandt werden, sobald er einen irrationalen Wert besitzt.

Im Falle B sind daher die 4 Größen $(\mathfrak{A}_2\overline{\mathfrak{B}}_1)$, $(\mathfrak{A}_2\overline{\mathfrak{A}}_1)$, $(\mathfrak{B}_2\overline{\mathfrak{B}}_1)$, $(\mathfrak{B}_2\overline{\mathfrak{A}}_1)$ bis auf einen gemeinsamen, nicht verschwindenden Faktor δ ganze rationale, von Null verschiedene Zahlen r, s, t, u, d. h.

$$(\mathfrak{A}_2\overline{\mathfrak{B}}_1) = \delta\cdot r, \quad (\mathfrak{A}_2\overline{\mathfrak{A}}_1) = \delta\cdot s, \quad (\mathfrak{B}_2\overline{\mathfrak{B}}_1) = \delta\cdot t, \quad (\mathfrak{B}_2\overline{\mathfrak{A}}_1) = \delta\cdot u.$$

§ 5.

Untersuchung des Falles B.

Unter Zugrundelegung der am Schlusse des § 4 gewählten Annahmen und Bezeichnungen ergibt sich

$$\mathfrak{A}_2 = \delta\cdot[r\mathfrak{A}_1 - s\mathfrak{B}_1]:(\mathfrak{A}_1\overline{\mathfrak{B}}_1),$$
$$\mathfrak{B}_2 = \delta\cdot[t\mathfrak{A}_1 - u\mathfrak{B}_1]:(\mathfrak{A}_1\overline{\mathfrak{B}}_1),$$
$$(\mathfrak{A}_1\overline{\mathfrak{B}}_1)\cdot(\mathfrak{A}_2\overline{\mathfrak{B}}_2) = \delta^2\cdot[st - ru], \tag{5}$$

und hieraus weiter vermöge (4′)

$$(6)\qquad \begin{cases} (\mathfrak{A}_1'\overline{\mathfrak{B}}_1') = (\mathfrak{A}_1\overline{\mathfrak{B}}_1) + \delta\cdot[nr+mt], \\ (\mathfrak{A}_2'\overline{\mathfrak{B}}_2') = (\mathfrak{A}_2\overline{\mathfrak{B}}_2) - \delta\cdot[nr+mt], \end{cases}$$

$$(7)\qquad \Delta' = (\mathfrak{A}_1'\overline{\mathfrak{B}}_1') - (\mathfrak{A}_2'\overline{\mathfrak{B}}_2') = \Delta + 2\delta\cdot[nr+mt],$$

wobei

$$\Delta = (\mathfrak{A}_1\overline{\mathfrak{B}}_1) - (\mathfrak{A}_2\overline{\mathfrak{B}}_2)$$

gesetzt ist.

Ferner gilt

$$(8)\qquad \begin{cases} (\mathfrak{A}_2'\overline{\mathfrak{B}}_1') = -\,n\Delta - \delta\cdot[n^2r+u], \\ (\mathfrak{B}_2'\overline{\mathfrak{B}}_1') = -\,m\Delta - \delta\cdot[2mnr+m^2t-s], \\ (\mathfrak{B}_2'\overline{\mathfrak{A}}_1') = -\,\delta\cdot r, \\ (\mathfrak{A}_2'\overline{\mathfrak{A}}_1') = \quad\delta\cdot t. \end{cases}$$

Dabei kann Δ als von Null verschieden vorausgesetzt werden. Denn andernfalls wäre dies durch eine Transformation (4′) $[m=0, n=1]$ zu erreichen und es können sodann, nötigenfalls, und ohne daß $\Delta = 0$ wird, wieder r, s, t und u von Null verschieden gemacht werden, solange nun $(\mathfrak{A}_1\overline{\mathfrak{B}}_1)$ und $(\mathfrak{A}_2\overline{\mathfrak{B}}_2)$ beide von Null verschieden bleiben (§ 3); diese Voraussetzung liegt dem Folgenden zugrunde.

Die Betrachtung von $(\mathfrak{A}_2'\overline{\mathfrak{B}}_1')$ und $(\mathfrak{B}_2'\overline{\mathfrak{B}}_1')$ in (8) ergibt nun wiederum zwei Möglichkeiten: *Entweder ist das Verhältnis von Δ und δ irrational*; dann ist unter der Annahme $m=0$, $n=1$ für die transformierten Periodenpaare $\mathfrak{A}_1'$, $\mathfrak{B}_1'$; $\mathfrak{A}_2'$, $\mathfrak{B}_2'$ die Annahme A erfüllt.

Oder es gilt $\Delta = \delta\cdot v$, wo bei geeigneter Verfügung über δ die Zahlen r, s, t, u und v sämtlich ganze rationale, von Null verschiedene Zahlen sind, die keinen gemeinschaftlichen Teiler besitzen.

Um auch für diesen Fall, und wenn r und t nicht schon von vornherein teilerfremd sind, die Reduktion auf eine Normalform zu erreichen, genügt folgende Bemerkung: *Man kann über die ganzen rationalen Zahlen m und n so verfügen, daß* $(\mathfrak{B}_2, \overline{\mathfrak{B}}_1)$ *und* $(\mathfrak{A}_2, \overline{\mathfrak{B}}_1)$ — nötigenfalls nach Vertauschung von $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{B}_1$ (Transf. (2)) — *bis auf den gemeinsamen Faktor δ, von Null verschiedene, ganze rationale Zahlen ohne gemeinsamen Teiler werden.*

Zum Beweise bezeichne man mit q_1 (bzw. q_2) den größten gemeinsamen Teiler von r, u, v (bezw. r, s, t, v), setze also

$$r = q_1 r_1,\ u = q_1 u_1,\ v = q_1 v_1 \quad \text{bzw.} \quad r = q_2 r_2,\ s = q_2 s_2,\ t = q_2 t_2,\ v = q_2 v_2.$$

Dann hat man

$$(\mathfrak{B}_2'\overline{\mathfrak{B}}_1') = -\,\delta\cdot q_2[mv_2 + 2mnr_2 + m^2t_2 - s_2] = \delta\cdot\tau_2(m,n),$$
$$(\mathfrak{A}_2'\overline{\mathfrak{B}}_1') = -\,\delta\cdot q_1[nv_1 + n^2r_1 + u_1] \qquad\qquad = \delta\cdot\tau_1(n).$$

$_1$ und q_2 sind teilerfremd, da r, s, t, u und v keinen gemeinsamen Teiler esitzen sollten; ebenso sind v_2, r_2, t_2, s_2 (bzw. v_1, r_1, u_1) ohne gemeinamen Teiler.

Nun gilt der leicht zu beweisende Satz: Gegeben sei die Form $(n) = an^2 + bn + c$, deren Koeffizienten a, b, c ganze rationale, von ull verschiedene Zahlen ohne gemeinsamen Teiler sein sollen. Dann ann die ganze Zahl n stets (sogar auf unendlich viele Arten) so gewählt erden, daß die (ganze rationale) Zahl $Q(n)$ von Null verschieden und u einer beliebig vorgegebenen Zahl f teilerfremd ist; ausgeschlossen ist er Fall $c \equiv 0 \pmod 2$, $a \equiv b \equiv 1 \pmod 2$, in welchem $Q(n)$ stets den eiler 2 besitzt. Der Satz bleibt indes auch dann noch richtig, soweit ur der Teiler 2 nicht in Frage kommt.

Dieser Satz werde auf die beiden quadratischen Formen $\tau_1(n)$ nd $\tau_2(m, n)$ angewandt. — Zuvor bemerke man: Falls $q_1 \equiv 0 \pmod 2$, st $\tau_2(m, n)$ nicht unbedingt durch 2 teilbar und umgekehrt muß $_2 \not\equiv 0 \pmod 2$ sein, wenn $\tau_2(m, n)$ unbedingt durch 2 teilbar ist. Wegen er Teilerfremdheit von q_1 und q_2 muß ja, $q_1 \equiv 0 \pmod 2$ voraus-esetzt, $q_2 \equiv 1 \pmod 2$ sein. Wegen $q_1 v_1 = q_2 v_2 \equiv 0 \pmod 2$ muß daher $_2 \equiv 0 \pmod 2$ sein; also ist die Bedingung für die unbedingte Teilbarkeit on $\tau_2(m, n)$ durch 2 nicht erfüllt. Gleiches gilt für q_2 und $\tau_1(n)$. — Ist nun . B. $\frac{\tau_1(n)}{q_1}$ unbedingt durch 2 teilbar, also $q_2 \equiv v_1 \equiv r_1 \equiv 1 \pmod 2$, $_1 \equiv 0 \pmod 2$, so sei etwa $q_1 \equiv 0 \pmod 2$. Es bezeichne q_3 den größten emeinsamen Teiler von s_2 und t_2, so daß also q_3 zu q_1 teilerfremd ist. Man bestimme $n = n_0$ so, daß $(v_2 + 2n_0 r_2)$ von Null verschieden und daß $\frac{\tau_1(n_0)}{q_1}$ teilerfremd wird zu q_2 und q_3, was dem Vorhergehenden zufolge tets möglich ist. Dann wird auch $\tau_1(n_0)$ teilerfremd zu q_2 und q_3. Wegen $q_1 v_1 = q_2 v_2$, $q_1 \equiv 0$, $q_2 \equiv 1$ gilt $v_2 \equiv 0 \pmod 2$ und mithin ist $_2(m, n_0)$ nicht unbedingt durch 2 teilbar. Man kann daher schließlich $_2(m, n_0)$ durch passende Wahl von $m = m_0$ teilerfremd zu $\tau_1(n_0)$ machen. Diskutiert man in dieser Art alle Möglichkeiten, so ergibt sich: Die ganzen Zahlen m und n können stets so bestimmt werden, daß $\tau_1(n)$ und $\tau_2(m, n)$ eilerfremde, ganze, von Null verschiedene Zahlen werden, es sei denn $v_2 \equiv t_2 \equiv v_1 \equiv r_1 \equiv 1 \pmod 2$, $s_2 \equiv u_1 \equiv 0 \pmod 2$ und folglich $q_1 \equiv q_2 \equiv 1 \pmod 2$.

Im Falle aber dies stattfindet, vertausche man zunächst (Transf. (2)) $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{B}_1$, d. h. man setze

$$\mathfrak{A}_1' = -\mathfrak{B}_1, \quad \mathfrak{B}_1' = \mathfrak{A}_1, \quad \mathfrak{A}_2' = \mathfrak{A}_2, \quad \mathfrak{B}_2' = \mathfrak{B}_2.$$

etzt ist

$$(\mathfrak{A}_2'\overline{\mathfrak{B}}_1') = \delta \cdot r' = \delta \cdot s, \quad (\mathfrak{A}_2'\overline{\mathfrak{A}}_1') = \delta \cdot s' = -\delta \cdot r, \quad (\mathfrak{B}_2'\overline{\mathfrak{B}}_1') = \delta \cdot t' = \delta \cdot u,$$
$$(\mathfrak{B}_2'\overline{\mathfrak{A}}_1') = \delta \cdot u' = -\delta \cdot t$$

und die Bedingungen des in Rede stehenden Ausnahmefalles sind bei dem transformierten System wegen

$$s' \equiv r \equiv 1 \pmod 2, \quad u' \equiv t \equiv 1 \pmod 2$$

nicht mehr erfüllt.

§ 6.

Erledigung des Falles B.

Nunmehr läßt sich auch der Fall B erledigen.

Sei zunächst $\varrho = 2$. Dem im § 5 Bewiesenen zufolge können r und t stets von Null verschieden und teilerfremd vorausgesetzt werden. Übt man nun auf das so vorbereitete gegebene Periodensystem die Transformation (4′) aus, so gilt zufolge (7)

$$\Delta' = \delta \cdot (v + 2[nr + mt]).$$

Je nachdem $v \equiv 0 \pmod 2$ oder $v \equiv 1 \pmod 2$ ist, kann man daher erreichen, daß $\Delta' = 0$ oder daß $\Delta' = \delta$ wird. Für $\Delta' = 0$ ist aber $(\mathfrak{A}_1'\overline{\mathfrak{B}}_1') = (\mathfrak{A}_2'\overline{\mathfrak{B}}_2') = \frac{h^2}{2} > 0$ und damit ist das gegebene Periodensystem auf eine Normalform gebracht.

Für $\Delta' = \delta$ benutze man hingegen die Ungleichung

$$(\Delta')^2 + 4(\mathfrak{A}_1'\overline{\mathfrak{B}}_1')(\mathfrak{A}_2'\overline{\mathfrak{B}}_2') > 0.$$

Außerdem ist zufolge (5) und (6)

$$(\mathfrak{A}_1'\overline{\mathfrak{B}}_1')(\mathfrak{A}_2'\overline{\mathfrak{B}}_2') = \delta^2[(st - ru) - (nr + mt)v - (nr + mt)^2] = \delta^2 \cdot R,$$

wo R eine ganze rationale Zahl bedeutet, die unter Umständen auch Null sein kann. Also

$$(\Delta')^2 + 4(\mathfrak{A}_1'\overline{\mathfrak{B}}_1')(\mathfrak{A}_2'\overline{\mathfrak{B}}_2') = \delta^2[1 + 4R] > 0,$$

woraus $R \geqq 0$ folgt. Die beiden reellen Zahlen $(\mathfrak{A}_1'\overline{\mathfrak{B}}_1')$ und $(\mathfrak{A}_2'\overline{\mathfrak{B}}_2')$ sind daher entweder beide positiv oder eine ist positiv, die andere aber Null, d. h. die Zurückführung des gegebenen Periodensystems auf eine Normalform ist auch hier geleistet.

Liegt der *Fall* $\varrho = 3$ vor, so existieren entweder zwei Periodenpaare, für welche die Annahme A des § 4 zutrifft, oder es gilt allgemein

$$\left.\begin{aligned} (\mathfrak{A}_{k_2}\overline{\mathfrak{B}}_{k_1}) &= \delta_{k_2 k_1} \cdot r_{k_2 k_1}, \quad (\mathfrak{A}_{k_2}\overline{\mathfrak{A}}_{k_1}) = \delta_{k_2 k_1} \cdot s_{k_2 k_1} \text{ usw.} \\ \Delta_{k_2 k_1} &= (\mathfrak{A}_{k_1}\overline{\mathfrak{B}}_{k_1}) - (\mathfrak{A}_{k_2}\overline{\mathfrak{B}}_{k_2}) = \delta_{k_2 k_1} \cdot v_{k_2 k_1} \end{aligned}\right\} \begin{matrix} k_1, k_2 = 1, 2, 3; \\ k_1 \neq k_2. \end{matrix}$$

Dabei ist $\delta_{k_2 k_1} = \delta_{k_1 k_2}$ und es bedeuten $r_{k_2 k_1}$, $s_{k_2 k_1}$ usw. rationale, von Null verschiedene Zahlen. Man betrachte außerdem die automorphen Transformationen der Form

$$\mathfrak{A}'_{k_0} = \mathfrak{A}_{k_0} + l_1 \mathfrak{A}_{k_1} + l_2 \mathfrak{A}_{k_2}, \quad \mathfrak{A}'_{k_1} = \mathfrak{A}_{k_1}, \quad \mathfrak{A}'_{k_2} = \mathfrak{A}_{k_2},$$
$$\mathfrak{B}'_{k_0} = \mathfrak{B}_{k_0}, \quad \mathfrak{B}'_{k_1} = \mathfrak{B}_{k_1} - l_1 \mathfrak{B}_{k_0}, \quad \mathfrak{B}'_{k_2} = \mathfrak{B}_{k_2} - l_2 \mathfrak{B}_{k_0},$$

wo k_0, k_1, k_2 irgendeine Permutation der Zahlen 1, 2, 3 darstellen und l_1, l_2 ganze rationale, im übrigen beliebige Zahlen sind.

Es gilt dann

$$(\mathfrak{A}'_{k_0} \bar{\mathfrak{B}}'_{k_0}) = (\mathfrak{A}_{k_0} \bar{\mathfrak{B}}_{k_0}) + l_1 (\mathfrak{A}_{k_1} \mathfrak{B}_{k_0}) + l_2 (\mathfrak{A}_{k_2} \bar{\mathfrak{B}}_{k_0})$$

und man wird daher entweder wieder auf einen der Annahme A des § 4 entsprechenden Fall geführt oder es stehen auch alle Paare reeller Zahlen $(\mathfrak{A}_{k_1} \bar{\mathfrak{B}}_{k_0})$, $(\mathfrak{A}_{k_2} \bar{\mathfrak{B}}_{k_0})$ — welch letztere zufolge § 3 sämtlich von Null verschieden anzunehmen sind — in rationalem Verhältnis. Also kann allgemein gesetzt werden

$$\left.\begin{array}{ll} (\mathfrak{A}_{k_2} \bar{\mathfrak{B}}_{k_1}) = \delta \cdot r_{k_2 k_1}, & (\mathfrak{A}_{k_2} \bar{\mathfrak{A}}_{k_1}) = \delta \cdot s_{k_2 k_1} \quad \text{usw.} \\ \Delta_{k_2 k_1} = \delta \cdot v_{k_2 k_1}, & (\mathfrak{A}_{k_2} \bar{\mathfrak{B}}_{k_2}) (\mathfrak{A}_{k_1} \bar{\mathfrak{B}}_{k_1}) = \delta^2 \cdot d_{k_2 k_1} \end{array}\right\} \begin{array}{c} k_1, k_2 = 1, 2, 3; \\ k_1 \neq k_2, \end{array}$$

unter $r_{k_2 k_1}$, $s_{k_2 k}$, usw. rationale Zahlen verstanden.

Aus der letzten Beziehung folgt insbesondere, daß auch die Paare von Null verschiedener Zahlen) $(\mathfrak{A}_{k_1} \bar{\mathfrak{B}}_{k_1})$ und $(\mathfrak{A}_{k_2} \bar{\mathfrak{B}}_{k_2})$ rationale Verhältnisse bilden. Es ist mithin

$$(\mathfrak{A}_{k_1} \bar{\mathfrak{B}}_{k_1}) = \mu_{k_2 k_1} \cdot h_{k_1}^{(k_2)}, \qquad (\mathfrak{A}_{k_2} \bar{\mathfrak{B}}_{k_2}) = \mu_{k_2 k_1} \cdot h_{k_2}^{(k_1)},$$

wo $h_{k_1}^{(k_2)}$, $h_{k_2}^{(k_1)}$ rational und von Null verschieden sind. Da sicher mindestens *eine* der Zahlen $\Delta_{k_2 k_1}$ von Null verschieden sein muß — andernfalls wäre das gegebene Periodensystem bereits auf eine Normalform gebracht —, so ergibt sich für das zugehörige Indexpaar k_2, k_1 die Beziehung

$$\Delta_{k_2 k_1} = \delta \cdot v_{k_2 k_1} = \mu_{k_2 k_1} (h_{k_1}^{(k_2)} - h_{k_2}^{(k_1)}).$$

Es stimmt also $\mu_{k_2 k_1}$ bis auf einen rationalen Faktor mit δ überein und man hat

$$(\mathfrak{A}_{k_1} \bar{\mathfrak{B}}_{k_1}) = \delta \cdot h_{k_1}, \quad (\mathfrak{A}_{k_2} \bar{\mathfrak{B}}_{k_2}) = \delta \cdot h_{k_2},$$

wo h_{k_1}, h_{k_2} rational sind.

Unter Festhalten des zuletzt betrachteten Indexpaares k_2, k_1 wähle man δ so, daß die $r_{k_2 k_1}$, $s_{k_2 k_1}$, $t_{k_2 k_1}$, $u_{k_2 k_1}$, $v_{k_2 k_1}$ ganze rationale Zahlen ohne gemeinsamen Teiler werden. Dann werden auch h_{k_1} und h_{k_2} ganze rationale Zahlen. Tatsächlich sind ja $\Delta = \delta \cdot (h_{k_1} - h_{k_2})$ und $\delta \cdot h_{k_1} h_{k_2}$, vom Faktor δ abgesehen, ganze rationale Zahlen, woraus die Behauptung folgt.

Vermittelst einer Transformation (4′) bilde man jetzt aus $\mathfrak{A}_{k_1}$, $\mathfrak{B}_{k_1}$ und $\mathfrak{A}_{k_2}$, $\mathfrak{B}_{k_2}$ zwei neue Periodenpaare, für welche die zugehörigen Zahlen r, s, t, u, v ganzzahlig und von Null verschieden bleiben und überdies r und t teilerfremd sind; die neuen Werte von h_{k_1} und h_{k_2} sind ebenfalls

ganzzahlig. Daher lassen sich bei erneuter Anwendung von (4′) die dort auftretenden ganzen Zahlen m und n so bestimmen, daß in

$$(\mathfrak{A}'_{k_1}\overline{\mathfrak{B}}'_{k_1}) = \delta(h_{k_1} + r_{k_2 k_1} n + t_{k_2 k_1} m)$$

die rechte Seite Null wird, womit die Anzahl $(p - \varrho)$ von Periodenpaaren, für welche $(\mathfrak{A}\overline{\mathfrak{B}}) = 0$ ist, um Eins erhöht und der betrachtete Fall auf bereits erledigte zurückgeführt wird.

Für $\varrho > 3$ gelten die eben angestellten Überlegungen unverändert.

Die in den §§ 4, 5 und 6 angestellten Überlegungen lassen bei einiger Modifikation erkennen, daß die Reduktion eines beliebig vorgegebenen Periodensystems auf eine Normalform stets durch eine endliche Anzahl von Operationen erreicht werden kann. Eine Vorschrift für derartige Reduktionen ergibt sich gleichfalls aus dem Vorstehenden.

§ 7.

Die kleinste Anzahl ϱ^* positiver Terme $(\mathfrak{A}_\lambda \overline{\mathfrak{B}}_\lambda)$, die bei der Transformation eines vorgegebenen Periodensystems auf eine Normalform erreicht werden kann.

Es hat sich im vorhergehenden ergeben, daß jedes vorgelegte, der Bedingung (I) genügende Periodensystem [auf mindestens eine Weise] in eine Normalform transformiert werden kann. Ist nun für ein vorgegebenes Periodensystem diese Überführung auf mehrfache Weise möglich und ergeben sich dabei verschiedene Werte von ϱ, so liefert (mindestens) eine der so erreichbaren Normalformen den *kleinstmöglichen Wert von* ϱ, der *mit* ϱ^* *bezeichnet werde*. Beispiele dafür, daß die Normalform nicht eindeutig bestimmt zu sein braucht und daß dabei ϱ verschiedener Werte fähig sein kann, lassen sich leicht angeben.

Es wäre nun von vornherein nicht undenkbar, daß die Ordnung ϱ vermöge automorpher ganzzahliger Transformationen sich stets etwa auf den Wert $\varrho^* = 1$ herabdrücken ließe, womit der oben eingeführte Begriff der Minimalzahl ϱ^* überflüssig würde. Daß dem nicht so ist, lehrt der folgende Satz:

Es existieren Periodensysteme, für die p *und* $\varrho^*\,(1 \leqq \varrho^* \leqq p)$ *beliebig vorgegebene (ganze) Zahlen sind.*

Zum Beweise betrachte man die allgemeine Form der automorphen Substitutionen. Setzt man

$$\mathfrak{A}'_\iota = \sum_{\varkappa=1}^{p} [\alpha_{\iota\varkappa}\mathfrak{A}_\varkappa + \beta_{\iota\varkappa}\mathfrak{B}_\varkappa], \quad \mathfrak{B}'_\iota = \sum_{\varkappa=1}^{p} [\gamma_{\iota\varkappa}\mathfrak{A}_\varkappa + \delta_{\iota\varkappa}\mathfrak{B}_\varkappa], \quad \iota = 1, \ldots, p,$$

so hat die Determinante D der ganzzahligen Koeffizienten α, β, γ, δ den Wert Eins[18]). Ferner gilt

$$(9) \quad (\mathfrak{A}_\iota' \overline{\mathfrak{B}}_\iota') = \sum_{\varkappa=1}^{p} \sum_{\lambda=\varkappa+1}^{p} [L_{\varkappa\lambda}^{(\iota)} (\mathfrak{A}_\varkappa \overline{\mathfrak{A}}_\lambda) + M_{\varkappa\lambda}^{(\iota)} (\mathfrak{B}_\varkappa \overline{\mathfrak{B}}_\lambda)] + \sum_{\varkappa=1}^{p} \sum_{\lambda=1}^{p} N_{\varkappa\lambda}^{(\iota)} (\mathfrak{A}_\varkappa \overline{\mathfrak{B}}_\lambda),$$

wo gesetzt ist

$$L_{\varkappa\lambda}^{(\iota)} = \alpha_{\iota\varkappa}\gamma_{\iota\lambda} - \alpha_{\iota\lambda}\gamma_{\iota\varkappa}, \quad M_{\varkappa\lambda}^{(\iota)} = \beta_{\iota\varkappa}\delta_{\iota\lambda} - \beta_{\iota\lambda}\delta_{\iota\varkappa}, \quad N_{\varkappa\lambda}^{(\iota)} = \alpha_{\iota\varkappa}\delta_{\iota\lambda} - \beta_{\iota\lambda}\gamma_{\iota\varkappa}.$$

Zur Konstruktion des verlangten Beispiels setze man

$$(\mathfrak{B}_1 \overline{\mathfrak{B}}_1) = h_1,$$

$$(\mathfrak{A}_\mu \overline{\mathfrak{B}}_1) = r_\mu, \ (\mathfrak{A}_\mu \overline{\mathfrak{A}}_1) = s_\mu, \ (\mathfrak{B}_\mu \overline{\mathfrak{B}}_1) = t_\mu, \ (\mathfrak{B}_\mu \overline{\mathfrak{A}}_1) = u_\mu, \ \mu = 2, \ldots, \varrho^*,$$

$$(\mathfrak{A}_\nu \overline{\mathfrak{B}}_1) = r_\nu, \ (\mathfrak{A}_\nu \overline{\mathfrak{A}}_1) = s_\nu = \tau_\nu r_\nu, \ (\mathfrak{B}_\nu \overline{\mathfrak{B}}_1) = t_\nu, \ (\mathfrak{B}_\nu \overline{\mathfrak{A}}_1) = u_\nu = \tau_\nu t_\nu, \ \nu = \varrho^*+1, \ldots, p.$$

Die reellen Größen $h_1, r_2, \ldots, u_{\varrho^*}; r_{\varrho^*+1}, \tau_{\varrho^*+1}, \ldots, t_p$, die sämtlich von Null verschieden sein sollen, bilden ein System voneinander unabhängiger Parameter, durch welche sich alle übrigen, in (9) rechter Hand auftretenden Größen $(\mathfrak{A}_\varkappa \overline{\mathfrak{A}}_\lambda)$ usw. darstellen lassen. Man hat nämlich (vgl. § 5)

$$(\mathfrak{A}_\varkappa \overline{\mathfrak{A}}_\lambda) = \frac{1}{h_1}(s_\varkappa r_\lambda - s_\lambda r_\varkappa), \ (\mathfrak{A}_\varkappa \overline{\mathfrak{B}}_\lambda) = \frac{1}{h_1}(s_\varkappa t_\lambda - r_\varkappa u_\lambda), \ (\mathfrak{B}_\varkappa \overline{\mathfrak{B}}_\lambda) = \frac{1}{h_1}(u_\varkappa t_\lambda - u_\lambda t_\varkappa)$$

$$\varkappa, \lambda = 2, 3, \ldots, p.$$

Hierbei ist, im Falle z. B. $\varrho^* + 1 \leqq \varkappa \leqq p$, zu beachten, daß $s_\varkappa = \tau_\varkappa r_\varkappa$ usw., und daher $(\mathfrak{A}_\varkappa \overline{\mathfrak{B}}_\varkappa) = 0$.

Man lege nun, was stets möglich ist, den $h_1, r_2, \ldots, u_p$ die weiteren Bedingungen auf:

$$h_1 > 0,$$

$$t_\mu - r_\mu u_\mu > 0, \quad \mu = 2, 3, \ldots, \varrho^*;$$

$$t_\lambda - r_\varkappa u_\lambda \neq 0, \ s_\varkappa r_\lambda - s_\lambda r_\varkappa \neq 0, \ u_\varkappa t_\lambda - u_\lambda t_\varkappa \neq 0, \ \varkappa, \lambda = 2, \ldots, p; \ \varkappa \neq \lambda.$$

Die Festsetzungen (10) und (12) sagen aus, daß ein zu den Werten $r_2, \ldots, u_p$ gemäß (10) und (11) gehöriges Periodensystem — und ein solches existiert immer — in der Normalform sich befindet, welche ihrerseits die Ordnung ϱ^* besitzt.

Man drücke vermöge (11) die in (9) auftretenden Faktoren der $L_{\varkappa\lambda}^{(\iota)}$, $M_{\varkappa\lambda}^{(\iota)}$, $N_{\varkappa\lambda}^{(\iota)}$ durch die unabhängigen Parameter $h_1, r_2, \ldots, u_{\varrho^*}; r_{\varrho^*+1}, \ldots, t_p$ aus und beachte, daß die zu verschiedenen Transformationszahlen $\varkappa\lambda^{(\iota)}$ usw. gehörigen Faktoren verschieden gebaut sind. Dann erkennt man: Die Parameter $h_1, r_2, \ldots, t_p$ lassen sich, im Rahmen der ihnen bereits auferlegten Bedingungen, so bestimmen, daß die Faktoren der Transformationszahlen $L_{\varkappa\lambda}^{(\iota)}$, $M_{\varkappa\lambda}^{(\iota)}$, $N_{\varkappa\lambda}^{(\iota)}$ — wobei von $N_{\nu\nu}^{(\iota)}$ $(\nu = \varrho^* + 1, \ldots, p)$

[18]) Vgl. Stahl, l. c. [16]), S. 322.

wegen $(\mathfrak{A}_\nu \overline{\mathfrak{B}}_\nu) = 0$ abgesehen wird — von Null verschieden und linear unabhängig werden, wenn für die $L_{\varkappa\lambda}^{(\iota)}$ usw. nur ganzzahlige Werte zu gelassen werden.

Sind die $h_1, r_2, \ldots, u_p$ derart bestimmt, dann ist ϱ^* tatsächlich der Minimalwert der durch automorphe Transformationen zu erreichenden Ordnung. Wenn nämlich für irgendeinen Wert ι $(1 \leqq \iota \leqq p)$ die Bedingung $(\mathfrak{A}_\iota' \overline{\mathfrak{B}}_\iota') = 0$ erfüllt wird, so müssen, von den $N_{\nu\nu}^{(\iota)}$ $(\nu = \varrho^* + 1, \ldots, p)$ abgesehen, sämtliche Transformationszahlen $L_{\varkappa\lambda}^{(\iota)}$ usw. Null sein. Man hat also

$$\alpha_{\iota\varkappa}\gamma_{\iota\lambda} - \alpha_{\iota\lambda}\gamma_{\iota\varkappa} = 0, \quad \beta_{\iota\varkappa}\delta_{\iota\lambda} - \beta_{\iota\lambda}\delta_{\iota\varkappa} = 0, \quad \varkappa, \lambda = 1, \ldots, p;$$

$$\alpha_{\iota\varkappa}\delta_{\iota\lambda} - \beta_{\iota\lambda}\gamma_{\iota\varkappa} = 0, \quad \varkappa, \lambda = 1, \ldots, p \text{ und nicht gleichzeitig}$$

$$\varrho^* + 1 \leqq \varkappa \leqq p \text{ sowie } \varkappa = \lambda.$$

Wegen $D = 1$ folgt hieraus $\alpha_{\iota\mu} = \beta_{\iota\mu} = \gamma_{\iota\mu} = \delta_{\iota\mu} = 0$ $(\mu = 1, 2, \ldots, \varrho^*)$. Gäbe es nun mehr als $(p - \varrho^*)$ verschiedene Indizes ι, für welche $(\mathfrak{A}_\iota' \overline{\mathfrak{B}}_\iota') = 0$, so müßte $D = 0$ sein, was bei einer automorphen Substitution nicht eintreten kann.

Inwieweit durch die in den §§ 4, 5 und 6 vorgenommenen Operationen der Minimalwert ϱ^* tatsächlich erreicht wird, wurde nicht entschieden und ist für die Zwecke vorliegender Arbeit auch ohne Bedeutung. Die eben angestellte Untersuchung läßt indes erkennen, wie man vorzugehen hat, um zu entscheiden, ob die Ordnung eines in der Normalform vorgelegten Periodensystems bereits den kleinsten Wert ϱ^* besitzt oder nicht.

§ 8.

Weitere Reduktion der Perioden.

Zum Zwecke der Konstruktion einer Riemannschen Parallelogrammfigur, welche zu einer vorgegebenen Normalform von der Ordnung ϱ gehört, muß diese Normalform weiter reduziert werden; dabei wird sich die Reduktion ausschließlich auf jene $(p - \varrho)$ Periodenpaare $\mathfrak{A}_\lambda, \mathfrak{B}_\lambda$ $(\lambda = p - \varrho + 1, \ldots, p)$ beschränken, für welche

$$(\mathfrak{A}_\lambda \overline{\mathfrak{B}}_\lambda) = 0$$

ist.

Unter diesen werden zunächst diejenigen Periodenpaare betrachtet, für die $\mathfrak{A}_\lambda \neq 0$ und $\mathfrak{B}_\lambda \neq 0$. Wegen $(\mathfrak{A}_\lambda \overline{\mathfrak{B}}_\lambda) = 0$ läßt sich durch Transformationen von der Form (1) (§ 3)

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{A}_\lambda' &= n_{\lambda 1}\mathfrak{A}_\lambda + m_{\lambda 1}\mathfrak{B}_\lambda \\ \mathfrak{B}_\lambda' &= n_{\lambda 2}\mathfrak{A}_\lambda + m_{\lambda 2}\mathfrak{B}_\lambda \end{aligned}\right\} \quad n_{\lambda 1}m_{\lambda 2} - n_{\lambda 2}m_{\lambda 1} = 1$$

stets bewirken, entweder daß $|\mathfrak{A}_\lambda'| = 0$ oder daß $|\mathfrak{A}_\lambda'|$ und $|\mathfrak{B}_\lambda'|$ beid

eichzeitig beliebig klein werden, je nachdem also $|\mathfrak{A}_\lambda| : |\mathfrak{B}_\lambda|$ rational der irrational ist.

Auf diejenigen Periodenpaare $\mathfrak{A}_\lambda, \mathfrak{B}_\lambda$, für welche eine Periode, also wa $\mathfrak{A}_\lambda$ Null, die andere $\mathfrak{B}_\lambda$ hingegen von Null verschieden ist, wende an automorphe Substitutionen der Form an

$$\mathfrak{A}_1' = \mathfrak{A}_1 + k\,\mathfrak{A}_\lambda, \quad \mathfrak{A}_\nu' = \mathfrak{A}_\lambda,$$

$$\mathfrak{B}_1' = \mathfrak{B}_1 - l\,\mathfrak{A}_\lambda, \quad \mathfrak{B}_\nu' = \mathfrak{B}_\lambda - k\,\mathfrak{B}_1 - l\,\mathfrak{A}_1,$$

obei der oben gemachten Annahme entsprechend $(\mathfrak{A}_1 \overline{\mathfrak{B}}_1) > 0$ ist. Bei assender Wahl der ganzen, im übrigen beliebigen Zahlen k und l, wird aher [während $\mathfrak{A}_1' = \mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{B}_1' = \mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{A}_\lambda' = 0$ bleibt] $\mathfrak{B}_\lambda'$ den Bedingungen

$$0 \underset{(=)}{\leqq} |(\mathfrak{A}_1' \overline{\mathfrak{B}}_\lambda')| < (\mathfrak{A}_1' \overline{\mathfrak{B}}_1'), \quad 0 \underset{(=)}{\leqq} |(\mathfrak{B}_1' \overline{\mathfrak{B}}_\lambda')| < (\mathfrak{A}_1' \overline{\mathfrak{B}}_1')$$

ntsprechend angenommen werden können. Geometrisch gesprochen: Deutet an $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_\lambda$ als Punkte in einer (komplexen) Ebene, so kann man ets erreichen, daß $\mathfrak{B}_\lambda$ entweder mit dem Nullpunkt zusammenfällt oder s Innere bzw. auf eine der vom Nullpunkt ausgehenden Seiten desjenigen arallelogramms zu liegen kommt, welches die Eckpunkte $0, \mathfrak{A}_1, \mathfrak{B}_1, \mathfrak{A}_1 + \mathfrak{B}_1$ esitzt.

Das in den §§ 4, 5 und 6 gewonnene Ergebnis läßt sich daher genauer formulieren:

Jedes vorgegebene, der Bedingung (I) *genügende System von* $2p$ *Perioden* $\mathfrak{A}_j, \mathfrak{B}_j$ $(j = 1, \ldots, p)$ *ist äquivalent mit einem Periodensystem (in der Normalform), das sich aus Periodenpaaren der folgenden* 4 *Arten zusammensetzt, nämlich aus*

1. ϱ *Periodenpaaren, für die* $(\mathfrak{A}_\varkappa \overline{\mathfrak{B}}_\varkappa) > 0$, $\varkappa = 1, \ldots, \varrho$;
2. σ *Periodenpaaren, für die* $(\mathfrak{A}_\lambda \mathfrak{B}_\lambda) = 0$ *und* $0 < |\mathfrak{A}_\lambda| < \varepsilon$, $0 < |\mathfrak{B}_\lambda| < \varepsilon$, $\lambda = \varrho + 1, \ldots, \varrho + \sigma$; wobei unter ε eine positive Größe verstanden wird, die beliebig klein vorgegeben werden kann;
3. τ *Periodenpaaren, für die*

$$\mathfrak{A}_\mu = 0, \ \mathfrak{B}_\mu \neq 0 \text{ und } 0 \underset{(=)}{\leqq} |(\mathfrak{A}_1 \overline{\mathfrak{B}}_\mu)| < (\mathfrak{A}_1 \overline{\mathfrak{B}}_1),$$
$$0 \underset{(=)}{\leqq} |(\mathfrak{B}_1 \overline{\mathfrak{B}}_\mu)| < (\mathfrak{A}_1 \overline{\mathfrak{B}}_1),$$
$$\mu = \varrho + \sigma + 1, \ \ldots, \ \varrho + \sigma + \tau;$$

4. $(p - \varrho - \sigma - \tau)$ *Periodenpaaren, für die*

$$\mathfrak{A}_\nu = \mathfrak{B}_\nu = 0, \ \nu = \varrho + \sigma + \tau + 1, \ \ldots, \ p.$$

§ 9.

Konstruktion einer zu gegebenem Periodensystem gehörigen Parallelogrammfigur.

Ein vorgegebenes Periodensystem wird zunächst auf die im § 8 an gegebene reduzierte Normalform gebracht.

Sodann bilde man mit $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{B}_1$ als Seiten das gewöhnliche, in eine komplexen w-Ebene liegende Parallelogramm $\mathfrak{p}_1$, dessen Inneres den Flächeninhalt $(\mathfrak{A}_1 \mathfrak{B}_1)$ besitzt. In dieses Parallelogramm bette man $(\sigma + \tau)$ geeignet gestaltete parallelogrammatische Rahmen ein, die zu den Periodenpaaren zweiter und dritter Art gehören, deren zugehörigen Flächeninhalt also Null sind. Bei hinreichend klein gewähltem ε ist dies stets möglich[19] derart, daß von diesen $(\sigma + \tau)$ Rahmen sowie von den Seiten von $\mathfrak{p}_1$ ein $(1 + \sigma + \tau)$-fach zusammenhängendes Gebiet mit $2(\sigma + \tau)$ Verzweigungspunkten im Inneren begrenzt wird, das den unendlich fernen Punkt der w-Ebene nicht überdeckt. Ferner hefte man an die so entstandene Parallelogrammfigur diejenigen, richtig orientierten Parallelogramme (positiven Inhalts) an[20]), die den etwa noch vorhandenen Periodenpaaren erster Art $\mathfrak{A}_\varkappa, \mathfrak{B}_\varkappa$ $(\varkappa = 2, \ldots, \varrho)$ entsprechen. Die hieraus sich ergebende Parallelogrammfigur stellt ein $(\varrho + \sigma + \tau)$-fach zusammenhängendes Gebiet $\tilde{N}$ mit $2(\varrho + \sigma + \tau - 1)$ einfachen, im Innern gelegenen Verzweigungspunkten und von positivem Flächeninhalt dar.

Sofern $\varrho + \sigma + \tau \geqq 2$ *ist,* läßt sich stets ein Punkt $\mathfrak{P}$ der w-Ebene angeben, über welchem mindestens zwei verschiedene innere Punkte $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$ von $\tilde{N}$ liegen, die keine Verzweigungspunkte sind. Es seien U_1 bzw. U_2 Umgebungen von $\mathfrak{P}_1$ bzw. $\mathfrak{P}_2$, die folgendermaßen gewählt sind: U_1 und U_2 sind einer hinreichend kleinen Umgebung U von $\mathfrak{P}$ überlagert und relativ unverzweigt bezüglich U; sie gehören dem Innern von $\tilde{N}$ an und gehen durch eine Decktransformation auseinander hervor. Unter Zuhilfenahme von U_1 und U_2 kann man in $\tilde{N}$ passend gewählte, zu den Periodenpaaren der vierten Art gehörige parallelogrammatische Rahmen einbetten. Man braucht zu dem Ende nur aus U_1 im ganzen $(p - \varrho - \sigma - \tau$ Kreise von genügend kleinem Radius auszustanzen, die weder innere noch Peripheriepunkte miteinander gemein haben, und sodann die gleiche Anzahl dazu kongruenter Kreise längs passend geführter Verzweigungsstrecken an U_2 anzuheften; und zwar soll dieses Anheften so erfolgen, daß jeder neu hinzugefügte Kreis gerade zwei neue Verzweigungspunkte entstehen

---

[19]) Vgl. Klein, l. c. [2]), S. 79; auch Haupt, l. c. [1]), S. 29; ferner das Zitat in Fußnote [21]) vorliegender Arbeit.

[20]) Vgl. Klein, l. c. [2]), S. 74.

ßt und daß seine Peripherie durch eine Decktransformation in eine der ırch Ausstanzen gebildeten kreisförmigen Begrenzungslinien übergeht[21]).

Aus der so konstruierten Parallelogrammfigur für die Normalform des gegebenen Periodensystems ergibt sich [etwa mit Hilfe kombinatorischer ethoden oder des Dirichletschen Prinzips] ein Abelsches Integral erster attung von der gewünschten Beschaffenheit.

§ 10.

Der Ausnahmefall.

Wie man aus § 9 ersieht, versagt die dort angegebene Konstruktion ner Riemannschen Parallelogrammfigur lediglich dann, wenn $\varrho + \sigma + \tau = 1$, h. wenn $\varrho = 1$, $\sigma = \tau = 0$ ist. Dies liegt in der Natur der Sache beündet. Es besteht nämlich der Satz:

Ein Abelsches Integral erster Gattung, dessen Periodensystem entweder die Form hat $(\mathfrak{A}_1 \mathfrak{B}_1) > 0$, $\mathfrak{A}_\nu = \mathfrak{B}_\nu = 0$ $(\nu = 2, \ldots, p)$ *oder (allgemeiner) zu einem solchen (im Sinne der Definition des* § 2) *äquivalent ist, kann nur ein elliptisches Integral sein; es ist also notwendig* $p = 1$.

Einen sehr einfachen Beweis dieses Satzes verdanke ich brieflicher itteilung von Herrn Wirtinger und gebe ihn mit seiner Erlaubnis hier ieder.

Angenommen, $w = \int_{z_0}^{z} dw$ sei ein Integral erster Gattung mit den angegebenen speziellen Perioden; T sei die zugehörige Riemannsche Fläche. an bilde mit $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{B}_1$ als Perioden die Weierstraßsche Sigmafunktion: $(u; \omega_1, \omega_2)$, wobei also $\omega_1 = \mathfrak{A}_1$, $\omega_2 = \mathfrak{B}_2$. Führt man hierin an Stelle r unabhängig Veränderlichen u das Integral w ein: $u = \int_{z_0}^{z} dw$, so zeigt e Betrachtung des über die Begrenzung von T' erstreckten Integrals $d[\log(\sigma(w; \omega_1, \omega_2))]$, daß $\sigma(w; \omega_1, \omega_2)$ auf der zu w gehörigen Fläche T' ır eine einzige Nullstelle besitzt. Infolgedessen sind jetzt $\frac{d^2 \log \sigma}{du^2}$, $\frac{d^3 \log \sigma}{du^3}$, ... gebraische Funktionen des in Rede stehenden Gebildes T, die nur einen nzigen Pol zweiter bzw. dritter usw. Ordnung besitzen. Nach dem eierstraßschen Lückensatze ist daher das Geschlecht von T gleich Eins.

Man ersieht aus dem eben Bewiesenen, daß in diesem (Ausnahme-)ll *jede* Reduktion des Periodensystems (auf eine Normalform) notwendig der in Rede stehenden Normalform $(\mathfrak{A}_1 \mathfrak{B}_1) > 0$, $\mathfrak{A}_\nu = \mathfrak{B}_\nu = 0$ $(\nu = 2, \ldots, p)$ hren muß[22]).

---

[21]) Vgl. auch Thomae, Sammlung von Formeln usw. (Halle 1876, S. 21, Fig. 1).

[22]) Vgl. das Zitat in Fußnote [23]).

Der Satz ergänzt zugleich ein Theorem betreffend die auf elliptische Integrale reduzierbaren Abelschen Integrale erster Gattung. Ein Integral erster Gattung, welches auf ein elliptisches reduzierbar ist, wird nämlich dadurch charakterisiert, daß sein Periodensystem durch „lineare, ganzzahlige" Transformationen entweder auf die Form

$$\mathfrak{A}_1 \neq 0, \quad \mathfrak{B}_1 \neq 0, \quad \mathfrak{A}_2 = \mathfrak{B}_2 = \mathfrak{A}_3 = \mathfrak{B}_3 = \ldots = \mathfrak{B}_p = 0, \quad (\mathfrak{A}_1 \overline{\mathfrak{B}}_1) > 0,$$

oder auf die Form

$$\mathfrak{A}_1 \neq 0, \quad \mathfrak{B}_1 \neq 0, \quad \mathfrak{A}_2 = \frac{\mathfrak{A}_1}{k}, \quad \mathfrak{B}_2 = \mathfrak{A}_3 = \mathfrak{B}_3 = \ldots = \mathfrak{B}_p = 0, \quad (\mathfrak{A}_1 \overline{\mathfrak{B}}_1) > 0$$

wo k eine ganze rationale Zahl $k \geqq 2$ bedeutet, gebracht werden kann [23]. Bezeichnet man, je nachdem der erste oder zweite Fall vorliegt, das *reduzierbare Integral* als *von der ersten* oder *zweiten Art*, so ergibt sich der

Zusatz: *Jedes reduzierbare Integral erster Art ist selbst ein elliptisches Integral.*

Andererseits existieren immer (sogar unbegrenzt viele) Integrale erster Gattung vom Geschlechte $p \geqq 2$, die *zu einem vorgegebenen Periodensystem zweiter Art* gehören und mithin *reduzierbare Integrale zweiter Art vom Geschlechte* $p \geqq 2$ sind. Diese Behauptung ergibt sich aus den Darlegungen des § 9.

Auch der geometrische Inhalt des formulierten Satzes erscheint nicht ohne Interesse, nämlich die Tatsache, daß ein der komplexen w-Ebene überlagertes Gebiet endlicher Blätterzahl notwendig einfach zusammenhängend sein muß, wenn es von einem einzigen parallelogrammatischen Rahmen [24]) begrenzt werden, eine Umgebung des unendlich fernen Punktes der w-Ebene nicht überdecken und eine gerade Anzahl (gegebenenfalls auch Null) einfacher Verzweigungspunkte enthalten soll. Daß dies nicht mehr richtig ist, wenn als Begrenzung ein beliebiger, einfacher geschlossener Streckenzug zugelassen wird, beweisen Beispiele. Doch soll hier darauf nicht näher eingegangen werden.

Schluß.

Schließlich ist auf Untersuchungen von Herrn Koebe [25]) hinzuweisen. Aus diesen geht unter anderem hervor: Die Gesamtheit der Periodensysteme der Abelschen Integrale erster Gattung vom Geschlecht p bildet ein offenes, zusammenhängendes, $4p$-dimensionales Kontinuum. Der in

[23]) Vgl. Krazer, Lehrbuch der Thetafunktionen (Leipzig 1903, S. 474, Satz II).
[24]) Der sich selbst nicht schneidet.
[25]) Koebe, Unif. d. algebr. Kurven IV (Math. Ann. 75, 1914, I. Teil, S. 51—98).

1 angegebene und oben bewiesene Satz bestimmt die vollständige Berenzung dieses Kontinuums.

Wie sich die im vorstehenden behandelte Frage einer allgemeineren, etreffend die Prymschen Funktionen, unterordnet, habe ich bereits früher argelegt[26]).

Der Satz des § 10 läßt sich verallgemeinern[27]).

Karlsruhe i. B., 24. April 1919.

---

[26]) Haupt, l. c. [1]), S. 61.

[27]) Vgl. hierzu auch Wirtinger, Untersuchungen über Thetafunktionen (Leipzig 895, S. 73).

(Eingegangen am 27. Mai 1919.)

Der Poincarésche Satz über Differenzengleichungen in seiner Anwendung auf eine Integralgleichung.

Von

Ernst Richard Neumann in Marburg.

Handelt es sich um die Aufgabe, aus irgendwelchen Bedingungen heraus eine Funktion auf der Kugelfläche zu bestimmen, so führt häufig die „Methode der unbestimmten Kugelfunktionen" zum Ziele, die darin besteht, daß man die Funktion zunächst als Laplacesche Reihe nach Kugelfunktionen mit unbestimmten Koeffizienten ansetzt, und diese Koeffizienten dann aus den Bedingungen des Problems heraus zu bestimmen sucht. Dabei tritt aber vielfach der Fall ein, daß man zwar zur Bestimmung der Koeffizienten eine Rekursionsformel erhält, die Anfangskoeffizienten aber, bzw. andere bei dem vorgelegten Probleme eingehende, und durch die Natur des Problems notwendigerweise völlig bestimmte Parameter zunächst unbestimmt bleiben, und doch scheinbar allen Forderungen des Problems Genüge geschieht, sobald man die rekurrent berechneten Koeffizienten benutzt. — In Wahrheit liegt in solchen Fällen nur eine formale Befriedigung der Bedingungen des Problems vor, während die so erhaltene Reihe gar nicht konvergiert und also auch nicht die gesuchte Funktion darstellen kann. Erst durch Hinzunahme der Forderung, daß die mit den rekurrent berechneten Koeffizienten gebildete Laplacesche Reihe konvergiere, werden sich die noch unbestimmt gebliebenen Größen und damit die Lösung des Problems ergeben.

Mir ist freilich in der Literatur kein Beispiel dafür bekannt, daß man nun aus dieser Konvergenzforderung heraus wirklich die Festlegung der Parameter und damit die endgültige Bestimmung der Koeffizienten durchgeführt hätte. — Ein Beispiel dieser Art will ich im folgenden geben.

Das Problem, um das es sich handelt, ist an sich nicht neu, und seine Lösung auf anderem Wege längst bekannt, weshalb weniger die Resultate als die Methoden der nachfolgenden Untersuchung Interesse

beanspruchen dürften. Immerhin ergeben sich durch Vergleichung der nach der älteren und der neuen Methode gefundenen Resultate einige recht bemerkenswerte Beziehungen.

Das Problem ist das folgende: *Es sollen bei der Kugel für die Integralgleichungen, auf welche die beiden Randwertaufgaben der Potentialtheorie führen, die Eigenwerte und Eigenfunktionen bestimmt werden.*

Betrachtet man die Kugel als Fläche in einem gewöhnlichen Polarkoordinatensystem r, ω, φ, so ist das Problem (eben nach der Methode der unbestimmten Kugelfunktionen) leicht vollständig zu lösen. Als Eigenwerte ergeben sich die ungeraden positiven ganzen Zahlen, und zu einem solchen Eigenwerte

$$\lambda = 2\nu + 1$$

gehören alsdann genau $2\nu + 1$ linear unabhängige Eigenfunktionen, nämlich, wenn wir sie orthogonalisieren, die $2\nu + 1$ Kugelfunktionen ν-ter Ordnung

$$P_\nu(\cos\omega), \qquad P_{\nu j}(\cos\omega)\cdot\begin{pmatrix}\cos j\varphi\\ \sin j\varphi\end{pmatrix}^{1)} \qquad (j = 1, 2, 3, \ldots, \nu).$$

Sieht man hingegen die betrachtete Kugel als Fläche in einem dipolaren Koordinatensysteme l, ϑ, φ an[2]), wie man ein solches etwa durch Inversion aus einem gewöhnlichen Polarkoordinatensystem entstanden denken kann, und sucht dann das Problem nach der entsprechenden Methode zu bestimmen, so tritt der oben geschilderte Fall ein: wir erhalten für die Koeffizienten eine Rekursionsformel, die noch den Poincaréschen Parameter λ enthält, und dessen singuläre Werte, eben *die gesuchten Eigenwerte, ergeben sich dann erst aus der Feststellung, daß nur für sie die mit den rekurrent berechneten Koeffizienten gebildete Laplacesche Reihe konvergiert.*

Die Lösung dieser Aufgabe stützt sich auf die Entdeckung Poincarés, daß bei der Berechnung von Zahlenfolgen $D_0, D_1, D_2, \ldots$ aus Rekursions-

---

[1]) In der Bezeichnungsweise folge ich F. Neumann, Vorlesungen über die Theorie des Potentials und der Kugelfunktionen, Leipzig, bei Teubner 1887. — Es sind danach die $P_\nu(x) = P_\nu(\cos\omega)$ die bekannten Legendreschen Polynome und $P_{\nu j}(x)$ die „zugeordneten Kugelfunktionen", die mit $P_\nu(x)$ durch die Gleichung

$$P_{\nu j}(x) = (\sqrt{1-x^2})^j \frac{d^j P_\nu(x)}{dx^j}$$

zusammenhängen.

[2]) Eine kurze Einführung in die Theorie der dipolaren Koordinaten findet man in des Verfassers Aufsatz in Bd. 120 des Crelleschen Journals (1899) S. 62—66. — Ich werde mich an die dortige Bezeichnungsweise halten, nur den Parameter der Kugelflächen werde ich mit l anstatt mit λ bezeichnen.

formeln sich (unter gewissen in unserem Falle erfüllten Voraussetzungen) der Quotient aufeinanderfolgender Elemente $\frac{D_{n+1}}{D_n}$ mit wachsendem n der Wurzel einer leicht angebbaren algebraischen Gleichung nähert. —

Der erste Paragraph bringt eine kurze Herleitung unserer Rekursionsformel. Der Schwerpunkt der Arbeit liegt dann aber erst in deren weiterer Behandlung, wie sie die §§ 2—4 bringen.

§ 1.

Die Zurückführung des Problems auf die Untersuchung einer Rekursionsformel.

Poincaré hat bekanntlich die Randwertaufgaben der Potentialtheorie für das Innen- und Außengebiet derselben geschlossenen Fläche σ durch Einführung eines Parameters λ in eine Aufgabe zusammengefaßt. Er ersetzt die beiden Forderungen, daß die gesuchte Funktion vorgegebene innere bzw. äußere Randwerte f_s besitzen solle:

$$F_{is} = f_s \quad \text{bzw.} \quad F_{as} = f_s$$

durch die eine:

$$\text{(P)} \qquad \frac{1}{2}(F_{is} - F_{as}) - \frac{\lambda}{2}(F_{is} + F_{as}) = f_s,$$

die für $\lambda = -1$ bzw. $\lambda = +1$ jene speziellen Forderungen in sich enthält[3]).

Setzt man dann die Lösung F dieses allgemeinen Poincaréschen Problems (P) als Potential einer Doppelbelegung an:

$$F_p = \frac{1}{2\pi}\int \mu_\sigma (d\sigma)_p \qquad (p \text{ ein beliebiger Punkt}),$$

wo $(d\sigma)_p$ das bekannte C. Neumannsche Symbol, die „scheinbare Größe" des Flächenelementes $d\sigma$ von p aus, bedeutet:

$$(d\sigma)_p = \frac{\cos(E_{\sigma p}, \nu_\sigma)}{E_{\sigma p}^2} d\sigma \quad (\nu_\sigma = \text{innerer auf } d\sigma \text{ errichteter Normalen}),$$

so ergibt sich für das Moment μ die Integralgleichung zweiter Art:

$$\mu_s - \frac{\lambda}{2\pi}\int \mu_\sigma (d\sigma)_s = f_s \qquad (s \text{ ein beliebiger Randpunkt}),$$

und die zugehörige homogene Gleichung lautet:

$$\text{(H}_\text{I}\text{)} \qquad \mu_s = \frac{\lambda}{2\pi}\int \mu_\sigma (d\sigma)_s,$$

und ganz entsprechende Überlegungen, angewandt auf die sogenannte zweite Randwertaufgabe (bei der anstatt der Randwerte die Werte der normalen

[3]) Poincaré, La méthode de Neumann et le problème de Dirichlet. Acta mathematica, 20 (1896), S. 59—142.

Ableitungen vorgeschrieben sind) führen zu der anderen homogenen Gleichung:

(H_{II}) $$\eta_s = \frac{\lambda}{2\pi} \int \eta_\sigma [d\sigma]_s,$$

wo

$$[d\sigma]_s = \frac{\cos(E_{\sigma s}, \nu_s)}{E_{\sigma s}^2} d\sigma \quad (\nu_s = \text{innerer Normale im Punkte } s).$$

Es sei nun die betrachtete Fläche σ speziell eine Kugelfläche (R). Dann ist augenscheinlich, wenn s und σ irgend zwei Stellen auf der Fläche bedeuten:

$$\cos(E_{\sigma s}, \nu_\sigma) = \cos(E_{\sigma s}, \nu_s) = \frac{E_{\sigma s}}{2R},$$

und daher:

$$(d\sigma)_s = [d\sigma]_s = \frac{1}{2R} \cdot \frac{d\sigma}{E_{\sigma s}},$$

und die beiden Gleichungen (H_I) und (H_{II}) für μ bzw. η fallen also in die eine zusammen:

$(\mathfrak{H})$ $$\eta_s = \frac{\lambda}{4\pi R} \int \eta_\sigma \frac{d\sigma}{E_{\sigma s}}.$$

Die speziellen Parameterwerte λ, für die diese Gleichung nicht verschwindende Lösungen η besitzt, sind die gesuchten *Eigenwerte* unseres Problems und die zugehörigen Funktionen η die *Eigenfunktionen*.

Man kann danach die Eigenfunktionen bei der Kugel definieren als die Dichtigkeiten solcher Flächenbelegungen, die die Eigenschaft haben, daß die Werte ihrer Potentiale auf der Fläche sich von den Werten der Dichtigkeiten nur durch konstante Faktoren unterscheiden.

Es gehöre nun die betrachtete Kugelfläche einem dipolaren Systeme l, ϑ, φ (Poldistanz 2a) mit dem Parameter $l = L > 0$ an $\left(\text{Radius } R = \frac{2a}{e^L - e^{-L}}\right)$. Nimmt man alsdann die Dichtigkeit η, also eine Funktion von ϑ und φ, in der Form an:

(L) $$\eta_s = \psi_s^{-\frac{3}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) Y_n(\mu_s, \varphi_s),$$

wo μ und ψ als Abkürzungen in folgenden Bedeutungen stehen:

(a) $$\mu = \cos\vartheta \quad \text{und} \quad \psi = e^L + e^{-L} - 2\cos\vartheta$$

und Y_n eine Laplacesche allgemeine Kugelfunktion n-ter Ordnung bedeutet, definiert durch eine Summe von der Form:

$$Y_n(\mu, \varphi) = \sum_{j=0}^{n} (A_{nj} \cos j\varphi + B_{nj} \sin j\varphi) P_{nj}(\mu)$$

mit unbestimmten Koeffizienten A_{nj} und B_{nj}, so sind die Oberflächenwerte des Potentials V dieser Belegung folgendermaßen darstellbar[4]):

$$V_s = 8\pi a \sqrt{\psi_s} \sum_{n=0}^{\infty} Y_n(\mu_s, \varphi_s),$$

und unsere Integralgleichung ($\mathfrak{H}$) nimmt daher die Gestalt an:

$$\psi^{\frac{3}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) Y_n(\mu, \varphi) = \left(\lambda \frac{e^L - e^{-L}}{8\pi a}\right) \cdot 8\pi a \sqrt{\psi} \sum_{n=0}^{\infty} Y_n(\mu, \varphi).$$

Der Parameter λ und die Koeffizienten A_{nj} und B_{nj} müssen also so bestimmt werden, daß dieser Gleichung Genüge geschieht, und zwar identisch in μ und φ. Daher müssen auch alle Glieder z. B. mit $\cos j\varphi$ beiderseits übereinstimmen, woraus

$$(A) \qquad \psi \sum_{n=j}^{\infty} (2n+1) A_{nj} P_{nj}(\mu) = \lambda (e^L - e^{-L}) \sum_{n=j}^{\infty} A_{nj} P_{nj}(\mu)$$

folgt, und analog ergibt sich durch Vergleichung der Glieder mit $\sin j\varphi$

$$(B) \qquad \psi \sum_{n=j}^{\infty} (2n+1) B_{nj} P_{nj}(\mu) = \lambda (e^L - e^{-L}) \sum_{n=j}^{\infty} B_{nj} P_{nj}(\mu)$$

Von diesen beiden Formeln brauchen wir nun augenscheinlich nur die eine, etwa (A), weiter zu verfolgen: Wir setzen noch abkürzend

$$(b) \qquad \frac{e^L + e^{-L}}{2} = \mathfrak{c} \quad \text{und} \quad \frac{e^L - e^{-L}}{2} = \mathfrak{s},$$

so daß nach (a) also $\psi = 2\mathfrak{c} - 2\mu$ wird, und daher (A) die Form annimmt:

$$(\mathfrak{c} - \mu) \sum_{n=j}^{\infty} (2n+1) A_{nj} P_{nj}(\mu) = \lambda \mathfrak{s} \sum_{n=j}^{\infty} A_{nj} P_{nj}(\mu).$$

Unter Anwendung einer bekannten Formel für die zugeordneten Kugelfunktionen[5]):

$$(2n+1)\mu P_{nj}(\mu) = (n+j) P_{n-1,j}(\mu) + (n-j+1) P_{n+1,j}(\mu)$$

können wir hierfür auch schreiben:

$$\sum_{n=j}^{\infty} [(2n+1)\mathfrak{c} - \lambda \mathfrak{s}] A_{nj} P_{nj}(\mu) = \sum_{n=j}^{\infty} A_{nj} [(n+j) P_{n-1,j}(\mu) + (n-j+1) P_{n+1,}$$

oder auch:

$$\sum_{n=j}^{\infty} [(2n+1)\mathfrak{c} - \lambda \mathfrak{s}] A_{nj} P_{nj}(\mu) = \sum_{n=j}^{\infty} [(n+1+j) A_{n+1,j} + (n-j) A_{n-1,j}] P_{nj}($$

---

[4]) Vgl. z. B. C. Neumann, Hydrodynamische Untersuchungen, Leipzig bei Teubner 1883, S. 266–267.

[5]) Vgl. F. Neumann, Beiträge zur Theorie der Kugelfunktionen, Leipzig bei Teubner 1878, S. 74, Formel (β).

Wenn diese Gleichung aber identisch in μ gelten soll, müssen die Koeffizienten von $P_{nj}(\mu)$ beiderseits gleich sein, d. h. es folgt

$$[(2n+1)\,c-\lambda\,\mathfrak{z}]\,A_{nj}=(n+1+j)\,A_{n+1,j}+(n-j)\,A_{n-1,j} \text{ für } n=j, j+1, \ldots$$

oder aber, wenn wir $(n+1)$ statt n schreiben:

$$(R)\quad \begin{cases} (n+2+j)\,A_{n+2,j}+[\lambda\,\mathfrak{z}-(2n+3)\,c]\,A_{n+1,j}+(n+1-j)\,A_{nj} \\ \qquad\qquad \text{für } n=j-1, j, j+1, \ldots \end{cases}$$

Damit ist die gesuchte Rekursionsformel für die Koeffizienten A_{nj} gefunden. — Dieselbe Formel hätte sich augenscheinlich aus (B) für die B_{nj} ergeben.

Denkt man sich nun für jedes j speziell A_{jj} und B_{jj} bekannt, so liefert stets die Formel (R), angewandt auf den Fall $n=j-1$, wo sie nur aus zwei Gliedern besteht, dazu ein ganz bestimmtes $A_{n+1,j}$ bzw. $B_{n+1,j}$, und die weiteren Formeln (R) für $n=j, j+1, \ldots$ liefern dann eindeutig auch alle weiteren A_{nj} bzw. B_{nj}, und alle diese Größen enthalten die als bekannt angenommenen Werte von A_{jj} bzw. B_{jj} als Faktoren. Aus den sich so für die verschiedenen Werte von j ergebenden Reihen

$$(L')\quad \psi^{\frac{3}{2}}\sum_{n=j}^{\infty}(2n+1)\,A_{nj}\,P_{nj}(\mu)\cos j\varphi \quad \text{und} \quad \psi^{\frac{3}{2}}\sum_{n=j}^{\infty}(2n+1)\,B_{nj}\,P_{nj}(\mu)\sin j\varphi$$

setzt sich dann also die allgemeine Lösung η der Integralgleichung ($\mathfrak{H}$) linear zusammen, und umgekehrt ist klar, daß jede dieser Reihen (L′) und daher auch jedes lineare Aggregat derselben mit willkürlichen konstanten Faktoren (A_{jj} bzw. B_{jj}) auch der Integralgleichung ($\mathfrak{H}$) unseres Problems genügt, und zwar, welchen Wert wir auch dem in die Rekursionsformel (R) eingehenden Parameter λ beilegen — das widerspricht aber der allgemeinen Theorie der Integralgleichungen, nach der solche homogenen Gleichungen, deren Kern keine stärkeren Singularitäten aufweist, nichtverschwindende Lösungen nur für eine Reihe diskreter λ-Werte, eben die Eigenwerte, besitzen. Es liegt danach die Vermutung nahe, daß eben bei beliebigem λ im allgemeinen nur eine formale Befriedigung der Integralgleichung ($\mathfrak{H}$) statthat, die Reihe (L) bzw. die Teilreihen (L′) aber divergieren, und daß nur für gewisse λ-Werte die rekurrent berechneten Koeffizienten zu konvergenten Reihen (L′) und damit zu brauchbaren Lösungen des Problems führen.

Um diese Vermutung zu prüfen, nehmen wir im nächsten Paragraphen direkt die folgende Frage in Angriff: Wie muß man die Werte des Parameters λ in der Rekursionsformel (R) bestimmen, damit die mit den rekurrent aus dieser Formel berechneten Koeffizienten A_{nj} (bzw. B_{nj}) gebildeten Laplaceschen Reihen (L′) konvergieren? — Die Mittel zur

Beantwortung dieser Frage wird uns ein Satz von Poincaré über Differenzengleichungen liefern.

Doch sei die Gleichung (R) zuvor noch in eine andere Form versetzt: Da darin j eine zwar beliebige Zahl aus der Reihe $0, 1, 2, \ldots$ bedeutet, an der wir aber im folgenden immer festgehalten denken, sollen wir den zweiten Index j hinfort unterdrücken, und da ferner der erste Index n von A_{nj} und B_{nj} nur die Werte $j, j+1, j+2, \ldots$ annimmt, so wollen wir für $A_j, A_{j+1}, A_{j+2}, \ldots$ kurz $C_0, C_1, C_2, \ldots$ schreiben, also allgemein

$$A_{n+j} = C_n \tag{c}$$

setzen. Dann lautet die Rekursionsformel für diese Größen C_n folgendermaßen:

$$(R') \quad \begin{cases} (n+2+2j)C_{n+2} + [(\lambda\mathfrak{z} - (2j+1)\mathfrak{c}) - (2n+2)\mathfrak{c}]C_{n+1} + (n+1)C_n = 0 \\ \text{für } n = -1, 0, 1, 2, \ldots \end{cases}$$

§ 2.

Der Poincarésche Satz über Differenzengleichungen.

Poincaré hat wohl als erster in einer Arbeit im American Journal of Mathematics, Vol. VII (1885) eine wichtige Angabe über das Verhalten der Lösungen linearer homogener Differenzengleichungen (Rekursionsformeln) bei wachsendem Index gemacht. Sie bezieht sich auf eine Gleichung von der Form:

$$D_{n+r} + a_1^{(n)} D_{n+r-1} + a_2^{(n)} D_{n+r-2} + \ldots + a_r^{(n)} D_n = 0 \quad \text{für} \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

und setzt voraus, daß die Koeffizienten $a_i^{(n)}$ für $i = 1, 2, \ldots, r$ mit wachsendem n je einem bestimmten Grenzwerte a_i zustreben. Dann zeigt Poincaré, daß sich bei beliebiger Wahl der ersten r Werte $D_0, D_1, \ldots, D_{r-1}$ die Quotienten $Q_n = \frac{D_{n+1}}{D_n}$ stets einer der Wurzeln ϱ der Gleichung

$$z^r + a_1 z^{r-1} + a_2 z^{r-2} + \ldots + a_r = 0 \tag{G}$$

nähern, vorausgesetzt, daß diese Wurzeln ϱ alle verschieden und auch von verschiedenem absolutem Betrage sind, also

$$\lim_{n=\infty} Q_n \equiv \lim_{n=\infty} \frac{D_{n+1}}{D_n} = \varrho .$$

Dieses Resultat ist dann später von Pincherle[6]) und unter etwas weiteren Voraussetzungen von Perron[7]) präzisiert. Unter Hinzunahme

[6]) Pincherle, Sur la génération de systèmes recurrents au moyen d'une équation linéaire différentielle, Acta mathematica, **16** (1893), S. 341–363.

[7]) Perron, Über einen Satz des Herrn Poincaré, Crelles Journal, **136** (1909), S. 17–38, insb. S. 26.

noch der weiteren Annahme, daß die letzten Koeffizienten $a_r^{(n)}$ der Differenzengleichung für alle Werte $n = 0, 1, 2, \ldots$ von 0 verschieden sind, beweist Perron, daß man durch passende Wahl der r Anfangswerte $D_0, D_1, \ldots, D_{r-1}$ es stets erreichen kann, daß der Quotient Q_n sich einer beliebigen der r Wurzeln ϱ von (G) nähert, und zwar gibt es (immer abgesehen von einem willkürlichen Faktor) nur eine eindeutig bestimmte Lösung, für welche sich Q_n der absolut kleinsten Wurzel nähert (Pincherles „ausgezeichnete Lösung"), eine einfach unendliche Mannigfaltigkeit von Lösungen, bei denen sich Q_n der zweitkleinsten Wurzel, eine zweifach unendliche, für die sich Q_n der drittkleinsten nähert, usw.

Die Voraussetzungen dieses Satzes sind bei unserer Rekursionsformel (R′) erfüllt, sobald wir die Gleichung für den Index $n = -1$ ausschließen, denn für $n = -1$ wird der letzte Koeffizient $(n+1)$, entsprechend dem obigen $a_r^{(n)}$, gleich 0. — Demgemäß wollen wir hinfort die „*Anfangsformel*" $(n = -1)$:

$$(\mathfrak{A}) \qquad (2j+1)C_1 + (\lambda\mathfrak{z} - (2j+1)\mathfrak{c})C_0 = 0$$

trennen von der eigentlichen „*Rekursionsformel*":

$$(\mathfrak{R}) \quad \begin{cases} (n+2+2j)C_{n+2} + [(\lambda\mathfrak{z} - (2j+1)\mathfrak{c}) - (2n+2)\mathfrak{c}]C_{n+1} + (n+1)C_n = 0 \\ \text{für } n = 0, 1, 2, \ldots \end{cases}$$

Nur mit dieser „Rekursionsformel $(\mathfrak{R})$" beschäftigen wir uns zunächst. Sie ist genau von dem Poincaré-Perronschen Typus (für $r = 2$), die Koeffizienten

$$a_1^{(n)} = \frac{\lambda\mathfrak{z} - (2j+1)\mathfrak{c} - (2n+2)\mathfrak{c}}{n+2+2j} \quad \text{und} \quad a_2^{(n)} = \frac{n+1}{n+2+2j}$$

nähern sich mit wachsendem n bestimmten Grenzwerten a_1 und a_2, es ist nämlich

$$a_1 = \lim_{n=\infty} a_1^{(n)} = -2\mathfrak{c} = -(e^L + e^{-L}) \quad \text{und} \quad a_2 = \lim_{n=\infty} a_2^{(n)} = 1,$$

und die Gleichung (G) lautet daher in unserem Falle:

$$z^2 - (e^L + e^{-L})z + 1 = 0,$$

und ihre beiden Wurzeln sind also:

$$(1) \qquad \alpha = e^{-L} \quad \text{und} \quad \beta = e^L.$$

Einer dieser beiden Größen nähert sich daher stets, d. h. bei beliebigen Anfangswerten C_0 und C_1, dem Poincaréschen Satze zufolge der Quotient $\frac{C_{n+1}}{C_n}$:

$$(2) \qquad \lim_{n=\infty} \frac{C_{n+1}}{C_n} = \alpha \quad \text{oder aber} \quad = \beta.$$

Da nun aber von diesen beiden möglichen Grenzwerten der eines nämlich α, ein echter Bruch, der andere, β, aber größer als 1 ist, so können die Größen C_n die Koeffizienten einer konvergenten Laplaceschen Reihe nur bilden, wenn eben der Quotient $\frac{C_{n+1}}{C_n}$ dem ersteren Werte α zustrebt. Wir müssen also die Anfangsglieder C_0 und C_1 so bestimmen, daß für die daraus rekurrent nach $(\mathfrak{R})$ berechneten Größen C_n

$$\lim_{n=\infty} \frac{C_{n+1}}{C_n} = \alpha \tag{3}$$

wird, und diese Bestimmung von C_0 und C_1 ist nach der Pincherle-Perronschen Erweiterung des Poincaréschen Satzes (von einem konstanten Faktor abgesehen) nur auf eine einzige Art möglich, und zwar bei beliebigem λ (Pincherles „ausgezeichnete Lösung").

Doch sind diese C_n der ausgezeichneten Lösung der Rekursionsformel $(\mathfrak{R})$ nur dann für unser Problem brauchbar, wenn C_0 und C_1 auch noch die „Anfangsformel $(\mathfrak{A})$" befriedigen, und das ist, wie sich herausstellen wird, nur für gewisse Werte von λ, eben die Eigenwerte, der Fall.

Damit ist der weitere Weg der Untersuchung vorgezeichnet: Wir werden zunächst bei unbestimmtem λ die ausgezeichnete Lösung der „Rekursionsformel $(\mathfrak{R})$ bestimmen (§ 3) und dann untersuchen, für welche Werte von λ diese Lösung zugleich der „Anfangsformel $(\mathfrak{A})$" genügt (§ 4).

§ 3.

Die Rekursionsformel $(\mathfrak{R})$. Herleitung der „ausgezeichneten Lösung" nach Pincherle.

Der Grundgedanke Pincherles bei Herstellung der verschiedenen Lösungen einer Rekursionsformel vom Poincaréschen Typus ist der, daß er diese in Beziehung setzt zu einer linearen Differentialgleichung, und zwar in folgender Weise: Er bildet zunächst mit einer Funktion U, z. B. der Variablen t, einen linearen homogenen Differentialausdruck DU von solcher Beschaffenheit, daß zwischen den Koeffizienten einer Potenzreihe gerade die in Rede stehende Rekursionsformel bestehen muß, damit die Reihe formal der Gleichung $DU = 0$ genügt, d. h. damit, diese Potenzreihe für U eingesetzt, in DU die Koeffizienten der einzelnen Potenzen von t verschwinden. — In unserem Falle der Rekursionsformel $(\mathfrak{R})$, deren Koeffizienten bloße lineare Funktionen des Index n sind, und die nur drei aufeinanderfolgende Größen C_n miteinander verknüpft, ist dieser lineare homogene Differentialausdruck von der ersten Ordnung, und man kann ihn von folgender Form annehmen:

$$DU \equiv (a_0 + a_1 t + a_2 t^2) t \frac{dU}{dt} + (b_0 + b_1 t + b_2 t^2) U, \tag{4}$$

enn die Forderung, daß nach Substituierung von

$$U(t) = \sum p_n t^n$$

ie Koeffizienten der einzelnen Potenzen von t in diesem Ausdruck (4) erschwinden, führt auf die Rekursionsformel

$\Re'$) $\quad ((n+2)a_0 + b_0)p_{n+2} + ((n+1)a_1 + b_1)p_{n+1} + (na_2 + b_2)p_n = 0,$

nd diese ist durch passende Wahl der Konstanten tatsächlich mit ($\Re$) ı voller Übereinstimmung zu bringen, wir brauchen nur

4′) $\quad a_0 = 1 \qquad a_1 = -2\mathfrak{c} = -(\alpha+\beta) \qquad a_2 = 1$

$\quad b_0 = 2j \qquad b_1 = \lambda\mathfrak{s} - (2j+1)\mathfrak{c} \qquad b_2 = 1$

ı setzen.

Wir denken uns nun weiter mit Pincherle in diesen Differentialusdruck (4) mit einer erst bei einer bestimmten, sagen wir μ-ten, Potenz eginnenden Potenzreihe

5) $\quad V(x) = \sum_{n=\mu}^{\infty} p_n x^n$

ineingegangen[8]), wo die p_n nach wie vor der Rekursionsformel ($\Re'$) geügen. Dann zerstören sich in $DV(x)$ alle Potenzen von der $(\mu+2)$-ten ı, und es wird daher $DV(x)$ eine ganze rationale Funktion $(\mu+1)$-ten rades, genauer:

$$DV(x) = (\mu a_0 + b_0)p_\mu x^\mu + [((\mu+1)a_0 + b_0)p_{\mu+1} + (\mu a_1 + b_1)p_\mu]x^{\mu+1},$$

nd umgekehrt ist klar, daß, *sobald eine Reihe von der Form* (5) *den ifferentialausdruck* (4) *in eine ganze Funktion* $(\mu+1)$*-ten Grades verandelt, die Koeffizienten* p_n *wenigstens von* $n = \mu$ *an der Rekursionsrmel* ($\Re'$) *genügen*, denn diese Formel ist ja die Bedingung dafür, daß le höheren Potenzen verschwinden.

Eine Reihe mit der genannten Eigenschaft erhält nun Pincherle ırch die „Heinesche Transformation“:

Es sei $U(t)$ das Integral der homogenen Differentialgleichung:

) $\quad DU(t) = 0,$

e als einzige singuläre Stellen die beiden Nullstellen der Gleichung

$$a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \equiv 1 - (\alpha+\beta)t + t^2,$$

h. die beiden Stellen $t = \alpha$ und $t = \beta$ besitzt. Dann ist bei passender ahl des Integrationsweges

$$\int \frac{U(t)\,dt}{t-x} = \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n \qquad \left(q_n = \int \frac{U(t)\,dt}{t^{n+1}}\right)$$

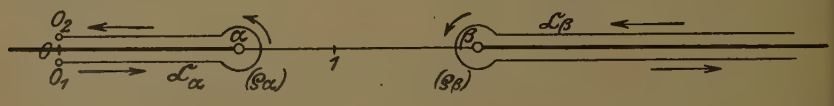
[8]) Nur aus formalen, sogleich ersichtlichen Gründen bezeichnen wir jetzt die ıabhängige mit x.

eine gewöhnliche Potenzreihe von x, die in jedem Kreise um den Nullpunkt konvergiert, der keinen Teil des Integrationsweges enthält.

Wir betrachten nun speziell den mit x^μ beginnenden Teil dieser Potenzreihe, den man auch folgendermaßen darstellen kann:

$$W(x) = \sum_{n=\mu}^{\infty} q_n x^n = x^\mu \int_{\mathfrak{C}_\beta} \frac{U(t)\,dt}{t^\mu (t-x)}. \tag{8}$$

Was den Integrationsweg anlangt, so denken wir uns zunächst die beiden singulären Stellen α und β der Differentialgleichung $DU = 0$ durch einen Schnitt verbunden, den wir längs der reellen Achse durch den Punkt ∞ führen. Alsdann denken wir uns den Integrationsweg $\mathfrak{C}_\beta$ bei ∞ beginnend längs des oberen Ufers jenes Schnittes bis nahe an β heran



dann auf einem kleinen Kreise (ϱ_β) den Punkt β umlaufend und auf dem unteren Ufer des Schnittes nach ∞ zurückkehrend. Die Reihe (8) konvergiert dann augenscheinlich für alle $|x| < \beta$. — Die Zahl μ ist dabei so groß gewählt zu denken, daß das Integral (8) und ebenso auch die folgenden Integrale bei der geforderten Ausdehnung der Integration bis $t = \infty$ einen bestimmten Sinn behalten.

Aus (8) ergeben sich nun sofort die folgenden Formeln:

$$\begin{cases} W(x) - x^\mu \displaystyle\int_{\mathfrak{C}_\beta} \frac{U(t)\,dt}{t^\mu (t-x)} = 0 \\ x^h W(x) - x^\mu \displaystyle\int_{\mathfrak{C}_\beta} \frac{t^h U(t)\,dt}{t^\mu (t-x)} = -\,x^\mu \displaystyle\int_{\mathfrak{C}_\beta} \left(\frac{t^h - x^h}{t-x}\right) \frac{U(t)\,dt}{t^\mu} \quad (h = 1, 2). \end{cases} \tag{9}$$

und andererseits folgt durch Differentiation:

$$x\,W'(x) = \mu\,W(x) + x^{\mu+1} \int_{\mathfrak{C}_\beta} \frac{U(t)\,dt}{t^\mu (t-x)^2}$$

oder, da $\dfrac{x}{(t-x)^2} = -\dfrac{1}{t-x} + \dfrac{t}{(t-x)^2}$ ist:

$$x\,W'(x) = \mu\,W(x) - W(x) + x^\mu \int_{\mathfrak{C}_\beta} \frac{U(t)\,dt}{t^{\mu-1}(t-x)^2}.$$

Formen wir nun dieses letztere Integral noch durch partielle Integration um, so ergibt sich, da die dabei vor das Integral tretenden Glieder (nach der Wahl von μ) verschwinden:

$$x\,W'(x) = (\mu-1)\,W(x) + x^{\mu}\int_{\mathfrak{C}_\beta}\left(\frac{U'(t)}{t^{\mu-1}} - (\mu-1)\frac{U(t)}{t^{\mu}}\right)\frac{dt}{t-x},$$

nd damit die erste der folgenden beiden, den Formeln (9) entsprechenden leichungen:

$$9')\quad \begin{cases} (x\,W'(x)) - x^{\mu}\displaystyle\int_{\mathfrak{C}_\beta}\frac{(tU'(t))\,dt}{t^{\mu}(t-x)} = 0 \\ x^{h}(x\,W'(x)) - x^{\mu}\displaystyle\int_{\mathfrak{C}_\beta}\frac{t^{h}(tU'(t))\,dt}{t^{\mu}(t-x)} = -\,x^{\mu}\int_{\mathfrak{C}_\beta}\left(\frac{t^{h}-x^{h}}{t-x}\right)\frac{(tU'(t))\,dt}{t^{\mu}} \end{cases}$$

$$(h = 1, 2).$$

Diese Gleichungen (9) und (9′) multiplizieren wir nun mit b_0 und b_h zw. a_0 und a_h $(h = 1, 2)$ und addieren sie sämtlich; dann erhalten wir:

$$DW(x) - x^{\mu}\int_{\mathfrak{C}_\beta}\frac{DU(t)\,dt}{t^{\mu}(t-x)}$$

$$= -\,x^{\mu}\int_{\mathfrak{C}_\beta}\left[(b_1 + b_2\,(t+x))\,U(t) + (a_1 + a_2\,(t+x))\,tU'(t)\right]\frac{dt}{t^{\mu}}.$$

Wegen (7) verschwindet nun das Integral linker Hand, und es ergibt sich daher:

$$10)\qquad DW(x) = -\,x^{\mu}\int_{\mathfrak{C}_\beta}\left[(a_1 + a_2 t)\,tU' + (b_1 + b_2 t)\,U\right]\frac{dt}{t^{\mu}} -$$

$$- x^{\mu+1}\int_{\mathfrak{C}_\beta}\left[a_2 tU' + b_2 U\right]\frac{dt}{t^{\mu}}.$$

. h. die Reihe (8), in unseren Differentialausdruck eingesetzt, verwandelt iesen in eine ganze rationale Funktion $(\mu+1)$-ten Grades. Nach dem, as wir oben feststellten, müssen also die Koeffizienten der Reihe, d. h. *ie Größen*

$$11)\qquad q_n = \int_{\mathfrak{C}_\beta}\frac{U(t)\,dt}{t^{\mu}} \quad \text{für} \quad n = \mu,\ \mu+1,\ \mu+2, \ldots$$

er Rekursionsformel $(\mathfrak{R}')$ *genügen.*

Dies zuvor festgestellt, formen wir jetzt noch die in (10) auftretenden ntegrale, soweit darunter $U'(t)$ vorkommt, durch partielle Integration um:

$$\int_{\mathfrak{C}_\beta}\frac{t^{h}U'(t)\,dt}{t^{\mu}} = (\mu-h)\int_{\mathfrak{C}_\beta}\frac{t^{h-1}\,U(t)\,dt}{t^{\mu}} \qquad (h = 1, 2),$$

wobei allerdings bezüglich der Zahl μ die weitere Annahme gemacht wird, daß auch noch

(12) $\qquad \frac{U(t)}{t^{\mu-2}}$ *für* $t=\infty$ *verschwinden soll.*

Dann nimmt (10) die Gestalt an:

$$DW(x) = -x^{\mu}\int_{\mathfrak{C}_\beta}[((\mu-1)a_1+b_1)+((\mu-2)a_2+b_2)t]\frac{U\,dt}{t^{\mu}} - \\ -x^{\mu+1}\int_{\mathfrak{C}_\beta}((\mu-1)a_2+b_2)\frac{U\,dt}{t^{\mu}}.$$

Dies mit der aus (6) sich ergebenden Formel

$$DW(x) = x^{\mu}(\mu a_0+b_0)q_{\mu}+x^{\mu+1}[((\mu+1)a_0+b_0)q_{\mu+1}+(\mu a_1+b_1)q_{\mu}]$$

verglichen, liefert uns die beiden Gleichungen:

$$((\mu+1)a_0+b_0)q_{\mu+1}+(\mu a_1+b_1)q_{\mu}+((\mu-1)a_2+b_2)\int_{\mathfrak{C}_\beta}\frac{U\,dt}{t^{\mu}}=0,$$

$$(\mu a_0+b_0)q_{\mu}+((\mu-1)a_1+b_1)\int_{\mathfrak{C}_\beta}\frac{U\,dt}{t^{\mu}}+((\mu-2)a_2+b_2)\int_{\mathfrak{C}_\beta}\frac{U\,dt}{t^{\mu-1}}=0,$$

welche aussagen, daß, wenn man nachträglich die Definition (11) der Größen q_n auch noch auf die Indizes $n=\mu-1$ und $n=\mu-2$ ausdehnt, *die Gesamtheit aller dieser Größen* q_n *für* $n\geqq\mu-2$ *der Rekursionsformel* $(\mathfrak{R}')$ *genügen.*

Da überdies $\sum q_n x^n$, wie schon festgestellt wurde, für jedes $|x|<\beta$ konvergiert, muß der

$$\lim_{n=\infty}\frac{q_{n+1}}{q_n}\leqq\frac{1}{\beta}=\alpha$$

sein; da aber für diesen Grenzwert nur die beiden Werte α und $\beta>\alpha$ in Betracht kommen [vgl. (2)], so folgt also:

(13) $$\lim_{n=\infty}\frac{q_{n+1}}{q_n}=\alpha,$$

d. h. die Größen q_n bilden für $n\geqq\mu-2$ die *„ausgezeichnete Lösung"* der Rekursionsformel $(\mathfrak{R}')$ [vgl. (3)].

Berücksichtigen wir nun die Werte (4′) der Koeffizienten $a_0\ldots b_2$, so daß also die Differentialgleichung (7), ausführlicher geschrieben, lautet:

$$(1-2ct+t^2)t\frac{dU}{dt}+[2j+(\lambda\varepsilon-(2j+1)c)t+t^2]U=0,$$

so erhalten wir für $U(t)$, das Integral dieser Gleichung, leicht die folgende Funktion:

$$U(t) = t^{-2j} \frac{(t-\alpha)^{\frac{\lambda+(2j-1)}{2}}}{(t-\beta)^{\frac{\lambda-(2j-1)}{2}}},$$

und da diese für $t = \infty$ selber wie $\frac{1}{t}$ verschwindet, so folgt nach (12), daß wir die Zahl μ gleich 2 annehmen dürfen. — So ergeben sich denn schließlich die Größen

(14) $$q_n = \int_{\mathfrak{C}_\beta} t^{-(n+1+2j)} \frac{(t-\alpha)^{\frac{\lambda+(2j-1)}{2}}}{(t-\beta)^{\frac{\lambda-(2j-1)}{2}}} dt \quad \text{für} \quad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

als *die ausgezeichnete Lösung unserer Rekursionsformel* $(\mathfrak{R})$ *bei beliebigem* λ.

Hier dürfte es sich noch empfehlen, anstatt λ eine neue Größe δ einzuführen, indem man

(d) $$\lambda = (2j+1) + 2\delta$$

setzt, und ferner die neue Integrationsvariable $s = \frac{1}{t}$ einzuführen. Dann lassen, da $\alpha\beta = 1$ ist, die q_n (nach Fortlassung eines unwesentlichen Zahlenfaktors) folgende einfachere Darstellung zu:

(15) $$q_n = \int_{\mathfrak{C}_\alpha} s^n \frac{(s-\beta)^{2j+\delta}}{(s-\alpha)^{\delta+1}} ds \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

wo jetzt der Integrationsweg $\mathfrak{C}_\alpha$ auf der endlichen Strecke $\overline{O\alpha}$ längs der beiden Ufer unseres Schnittes verläuft und den Punkt α umkreist (vgl. die Figur S. 11).

Doch ist noch eines Ausnahmefalles Erwähnung zu tun, in dem unsere Integraldarstellungen (14) und (15) der ausgezeichneten Lösung versagen. — Um an (15) anzuknüpfen, zerlegen wir das Kurvenintegral entsprechend den 3 Teilen, aus denen der Integrationsweg besteht; dann erhalten wir, da bei der Umlaufung des Punktes α sich der Integrand nur um den Faktor $e^{2\pi i\delta}$ ändert, durch Zusammenfassung der beiden auf die geradlinigen Wege bezüglichen Integrale:

(16) $$q_n = (1 - e^{2\pi i\delta}) \int_0^{\alpha-\varrho} s^n \frac{(s-\beta)^{2j+\delta}}{(s-\alpha)^{\delta+1}} ds + \int_{(\varrho_\alpha)} s^n \frac{(s-\beta)^{2j+\delta}}{(s-\beta)^{\delta+1}} ds.$$

Das Integral um die kleine Kreisperipherie (ϱ_α) verschwindet nun, falls δ *negativ* ist, im Grenzfalle $\varrho \to 0$, und wir sehen daher, daß, wenn δ überdies noch ganzzahlig, also eine *negative ganze Zahl* N ist, sämtliche q_n, wenigstens, wenn wir sie durch jene Integrale definieren, gleich 0 werden. Wir müssen uns also nach einem Ersatz für die Integraldarstellungen (14) und (15) umsehen.

Zu diesem Zwecke nehmen wir zunächst $\delta \neq \mathsf{N}$ an; dann sind die nach (15) zugehörigen q_n — wir bezeichnen sie jetzt genauer mit $q_n(\delta)$ — auch so darstellbar:

$$q_n(\delta) = q_n(\delta) - q_n(\mathsf{N}) \qquad \text{(da eben } q_n(\mathsf{N}) = 0 \text{ ist)},$$

und diese Größen bleiben auch noch Lösungen der Rekursionsformel ($\mathfrak{R}$), wenn wir sie mit konstanten d. h. von n unabhängigen Faktoren versehen. Demnach stellen auch noch die Größen

$$\frac{q_n(\delta) - q_n(\mathsf{N})}{\delta - \mathsf{N}}$$

eine solche Lösung dar, wie nahe auch das δ bei N liegt, also ist auch noch

$$\left(\frac{d\,q_n(\delta)}{d\,\delta}\right)_{\delta=\mathsf{N}} \qquad \textit{eine Lösung von } (\mathfrak{R}) \textit{ im Falle } \delta = \mathsf{N}.$$

Nun unterscheidet sich aber $\frac{d\,q_n(\delta)}{d\,\delta}$ nach (15) von q_n nur dadurch, daß unter dem Integrale noch der Faktor $\log\left(\frac{s-\beta}{s-\alpha}\right)$ hinzutritt. Dieser ändert sich aber bei der Umlaufung der Stelle $s = \alpha$ additiv um $(-2\pi i)$, und dieselbe Schlußweise, die uns zu (16) führte, liefert uns daher im Grenzfalle $\varrho \to 0$ das Resultat, daß

$$2\pi i \int_0^{\alpha} s^n \frac{(s-\beta)^{2j+\mathsf{N}}}{(s-\alpha)^{\mathsf{N}+1}}\,ds \qquad \textit{eine Lösung von } (\mathfrak{R}) \textit{ im Falle } \delta = \mathsf{N}$$

ist, womit für diesen Fall der gesuchte Ersatz für die Darstellung (15) gefunden ist. — Da es nun auf konstante Faktoren bei der Lösung nicht ankommt, können wir dieses Resultat mit dem oben aus (16) für negatives nicht ganzzahliges δ hergeleiteten leicht zusammenfassen, und erhalten so das folgende

Schlußresultat: *Es sei vorgelegt die Rekursionsformel* ($\mathfrak{R}$) S. 245:

$$(n+2+2j)\,C_{n+2} + [(\lambda\,\mathfrak{z} - (2j+1)\,\mathfrak{c}) - (2n+2)\,\mathfrak{c}]\,C_{n+1} + (n+1)\,C_n = 0$$
$$\textit{für } n = 0, 1, 2, \ldots,$$

in der j eine beliebige der Zahlen $0, 1, 2, \ldots$ *ist, und* $\mathfrak{z}$ *und* $\mathfrak{c}$ *in den aus* (b) S. 242 *ersichtlichen Bedeutungen stehen. Alsdann ist die ausgezeichnete Lösung dieser Formel, d. h. die Lösung, für welche*

$$\lim_{n=\infty} \frac{C_{n+1}}{C_n} = \alpha = e^{-L} < 1 \qquad \text{[vgl. (3)]}$$

wird, bei beliebigem λ folgendermaßen darstellbar: entweder durch das Kurvenintegral

(15)
$$q_n = \int_{\mathfrak{C}_\alpha} s^n \frac{(s-\beta)^{2j+\delta}}{(s-\alpha)^{\delta+1}}\,ds \qquad \left(\beta = \frac{1}{\alpha} = e^{L}\right)$$

vgl. die Figur S. 11] *oder durch das reelle Linienintegral*

$$q_n = \int_0^{\alpha} s^n \frac{(s-\beta)^{2j+\delta}}{(s-\alpha)^{\delta+1}} ds. \tag{15'}$$

Dabei ist

$$\delta = \frac{\lambda-(2j+1)}{2} \qquad \text{[vgl. (d)]}$$

esetzt, *und es ist die erste oder aber die zweite Darstellung am Platze,* e *nachdem* $\delta \geqq 0$ *oder aber* $\delta < 0$ *ist.*

§ 4.

Die Anfangsformel (𝔄). Bestimmung der Eigenwerte und Eigenfunktionen.

Nach den Ausführungen am Schlusse von § 2 gilt es jetzt, die λ-Werte estzustellen, für welche die Anfangswerte q_0 und q_1 der soeben bestimmten ausgezeichneten Lösung der Rekursionsformel (ℜ) auch noch der „Anfangsformel (𝔄)"

$$(2j+1)C_1 + (\lambda\bar{s} - (2j+1)\mathfrak{c})C_0 = 0$$

nseres Problems genügen.

Zu diesem Zwecke bezeichnen wir den Ausdruck, der nach Substituierung von q_0 und q_1 in (𝔄) auf der linken Seite steht, kurz mit A

$$(2j+1)q_1 + (\lambda\bar{s} - (2j+1)\mathfrak{c})q_0 \equiv \mathsf{A}$$

nd untersuchen dann, für welche Werte von λ diese Größe A verschwindet.

Nun ist nach (15) bzw. (15'):

$$\mathsf{A} = \int [(2j+1)s + (\lambda\bar{s} - (2j+1)\mathfrak{c})] \frac{(s-\beta)^{2j+\delta}}{(s-\alpha)^{\delta+1}} ds$$

oder, da wegen (d)

$$\lambda\bar{s} - (2j+1)\mathfrak{c} = (2j+1)(\bar{s}-\mathfrak{c}) + 2\delta\bar{s} = -(2j+1)\alpha + \delta(\bar{\beta}-\alpha)$$

ist:

$$\mathsf{A} = \int [(2j+\delta+1)(s-\alpha) - \delta(s-\beta)] \frac{(s-\beta)^{2j+\delta}}{(s-\alpha)^{\delta+1}} ds,$$

d. i. aber:

$$\mathsf{A} = \int \frac{d}{ds}\left[\frac{(s-\beta)^{2j+\delta+1}}{(s-\alpha)^{\delta}}\right] ds, \tag{17}$$

und zwar ist je nachdem ob $\delta \geqq 0$ oder aber $\delta < 0$ ist, integriert zu denken längs der Schleifenkurve $\mathfrak{C}_\alpha$, oder aber längs der reellen Achse von 0 bis α.

Fassen wir zunächst den Fall ins Auge, daß $\delta < 0$ ist. Dann ist also

$$A = \int_0^a \frac{d}{ds}\left[\frac{(s-\beta)^{2j+\delta+1}}{(s-\alpha)^{\delta}}\right] ds = \left[\frac{(s-\beta)^{2j+\delta+1}}{(s-\alpha)^{\delta}}\right]_{s=a} - \left[\frac{(s-\beta)^{2j+\delta+1}}{(s-\alpha)^{\delta}}\right]_{s=0},$$

oder

$$A = 0 - \frac{(-\beta)^{2j+\delta+1}}{(-\alpha)^{\delta}} = \frac{\beta^{2j+\delta+1}}{\alpha^{\delta}} = \beta^{2j+2\delta+1} \neq 0,$$

und daraus ersehen wir, daß also *im Falle* $\delta < 0$ *die ausgezeichnete Lösung von* ($\mathfrak{R}$) *niemals auch der Anfangsformel* ($\mathfrak{A}$) *genügen kann.*

Es bleibt sonach nur noch der Fall $\delta \geqq 0$ zu untersuchen. In ihm muß das Integral (17) über den Schleifenweg $\mathfrak{C}_a$ hinerstreckt werden, und es ergibt sich daher

$$A = \int_{\mathfrak{C}_a} \frac{d}{ds}\left[\frac{(s-\beta)^{2j+\delta+1}}{(s-\alpha)^{\delta}}\right] ds = \left[\frac{(s-\beta)^{2j+\delta+1}}{(s-\alpha)^{\delta}}\right]_{O_2} - \left[\frac{(s-\beta)^{2j+\delta+1}}{(s-\alpha)^{\delta}}\right]_{O_1},$$

wenn O_1 und O_2 die beiden im Nullpunkte sich auf den verschiedenen Ufern des Schnittes gegenüberliegenden Punkte (Anfangs- und Endpunkt von $\mathfrak{C}_a$) bedeuten [vgl. die Figur S. 11]. Die Werte der Funktion in diesen beiden Punkten unterscheiden sich aber nur durch den Faktor $e^{2\pi i\delta}$, es folgt also

$$A = (1 - e^{2\pi i\delta})\frac{\beta^{2j+\delta+1}}{\alpha^{\delta}} = (1 - e^{2\pi i\delta})\beta^{2j+2\delta+1}.$$

Hieraus ist aber ersichtlich, daß auch jetzt *nur für ganzzahlige* δ die Größe A zu 0 werden, also *die Anfangsformel* ($\mathfrak{A}$) *neben der Rekursionsformel* ($\mathfrak{R}$) *durch deren ausgezeichnete Lösung befriedigt werden kann.*

Diese Feststellung enthält aber nach den Ausführungen von § 2 das Resultat: Nur wenn δ eine positive ganze Zahl oder 0 ist, oder, was nach (d) dasselbe: *nur wenn* λ *eine ungerade ganze Zahl* $\geqq 2j+1$ *ist, bilden die aus den Formeln* ($\mathfrak{A}$) *und* ($\mathfrak{R}$) *rekurrent berechneten Größen* C_n *die Koeffizienten einer konvergenten Laplaceschen Reihe.*

Da nun aber j eine beliebige ganze Zahl $\geqq 0$ war, so erhalten wir als ausgezeichnete λ-Werte (Eigenwerte unseres Problems von § 1) sämtliche ungeraden positiven ganzen Zahlen

$$\lambda = 2\nu + 1 \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots), \tag{18}$$

wie das auch von Betrachtungen in gewöhnlichen Polarkoordinaten her bekannt ist [vgl. die Einleitung] — und zugleich ergibt sich das Resultat, daß *in den Laplaceschen Reihen für die zu einem solchen Eigenwerte* (18) *gehörigen Eigenfunktionen nur zugeordnete Kugelfunktionen* $P_{nj}(\mu)$ *mit einem zweiten Index*

9) $$j \leqq \nu$$

uftreten können.

Zu dem Eigenwerte $\lambda = 2\nu + 1$ erhalten wir nach (L') S. 6 somit $\nu + 1$ linear unabhängige Eigenfunktionen, d. h. nicht verschwindende ösungen unserer homogenen Integralgleichung $(\mathfrak{H})$ S. 4, und aus ihnen tzt sich die allgemeine Lösung von $(\mathfrak{H})$ linear mit konstanten Faktoren sammen. — Diese $2\nu + 1$ Eigenfunktionen (L') lassen sich nun mit ücksicht auf (A) S. 5 in doppelter Weise darstellen:

$$0)\quad \left.\begin{matrix} u_{\nu j} \\ v_{\nu j} \end{matrix}\right\} = \psi^{\frac{1}{2}} \sum_{n=j}^{\infty} (2n+1) A_{nj} P_{nj}(\mu) \cdot \begin{pmatrix} \cos j\varphi \\ \sin j\varphi \end{pmatrix}^{9)} \qquad (j = 0, 1, 2, \ldots, \nu)$$

ler auch:

$$0')\quad \left.\begin{matrix} u_{\nu j} \\ v_{\nu j} \end{matrix}\right\} = (2\nu+1)(\beta-\alpha)\sqrt{\psi} \sum_{n=j}^{\infty} A_{nj} P_{nj}(\mu) \cdot \begin{pmatrix} \cos j\varphi \\ \sin j\varphi \end{pmatrix} \quad (j = 0, 1, 2, \ldots, \nu).$$

Dabei verstehen wir unter den u immer die Funktionen mit den s-Faktoren, unter den v die mit den sin-Faktoren. (Es gibt dann $+1$ Funktionen u, aber nur ν Funktionen v, da das v für $j = 0$ identisch 0 rd und daher ausscheidet.)

In diesen Formeln (20) und (20′) ist nun allgemein nach (c) S. 7

$$A_{nj} = C_{n-j}$$

setzen und die C_n jetzt also gleich den q_n, d. h. gleich den Elementen r eben bestimmten ausgezeichneten Lösung von $(\mathfrak{R})$, denn nur dann nvergieren eben diese Reihen.

Nun ist nach (d) S. 14 jetzt $\delta = \nu - j$, also eine ganze Zahl, und ch (16) reduziert sich daher das q_n definierende Kurvenintegral auf das tegral längs des kleinen den Punkt α umlaufenden Kreises (ϱ_α), bzw., nn wir wieder $t = \frac{1}{s}$ als Integrationsvariable einführen, auf ein Integral ngs des kleinen Kreises (ϱ_β) um den Punkt β. — Fügen wir noch ge-gnete Faktoren hinzu, so können wir die A_{nj} jetzt folgendermaßen finieren:

$$= \frac{\alpha^{\nu+\frac{1}{2}}}{(\beta-\alpha)^j} \cdot \frac{(-1)^j}{2\pi i} \int_{(\varrho_\alpha)} s^{n-j} \frac{(s-\beta)^{\nu+j}}{(s-\alpha)^{\nu-j+1}} ds = \frac{\beta^{\nu+\frac{1}{2}}}{(\beta-\alpha)^j} \cdot \frac{(-1)^j}{2\pi i} \int_{(\varrho_\beta)} t^{-(n+j+1)} \frac{(t-\alpha)^{\nu+j}}{(t-\beta)^{\nu-j+1}}$$

Diese Koeffizienten A_{nj} der die Eigenfunktionen darstellenden Reihen 0) oder (20′) sind danach im wesentlichen die Residuen gewisser Funk-nen an der Stelle α bzw. β, oder die Koeffizienten der $(\nu - j)$-ten

[9]) Da die früher von uns mit B_{nj} bezeichneten Koeffizienten sich von den A_{nj} r durch konstante, d. h. von n unabhängige, Faktoren unterscheiden [vgl. S. 6], dürfen wir sie eben auch den A_{nj} gleich setzen, wie hier geschehen ist.

Potenz in der Entwicklung der Funktion $s^{n-j}(s-\beta)^{\nu+j}$ nach Potenzen von $(s-\alpha)$, bzw. der Funktionen $t^{-(n+j+1)}(t-\alpha)^{\nu+j}$ nach Potenzen von $(t-\beta)$, also von Faktoren abgesehen:

$$\left[\frac{d^{\nu-j}}{ds^{\nu-j}}(s^{n-j}(s-\beta)^{\nu+j})\right]_{s=\alpha} \quad \text{bzw.} \quad \left[\frac{d^{\nu-j}}{dt^{\nu-j}}(t^{-(n+j+1)}(t-\alpha)^{\nu+j})\right]_{t=\beta}$$

und auf Grund dieser Bemerkung ergeben sich für die A_{nj} leicht die folgenden beiden zur Berechnung wohl am besten geeigneten Darstellungen:

$$(22\,a) \qquad A_{nj} = \alpha^{n+\nu+\frac{1}{2}}(\nu+j)!\,(n-j)!\sum_{\varkappa=j}^{N}\frac{(-1)^{\varkappa}(\beta^2-1)^{\varkappa}}{(\varkappa-j)!\,(\varkappa+j)!\,(\nu-\varkappa)!\,(n-\varkappa)!},$$

wo N die kleinere der beiden Zahlen ν und n bedeutet, und:

$$(22\,b) \qquad A_{nj} = \alpha^{n-\nu+\frac{1}{2}}\frac{(\nu+j)!}{(n+j)!}\sum_{\varkappa=j}^{\nu}\frac{(-1)^{\varkappa}(n+\varkappa)!\,(1-\alpha^2)^{\varkappa}}{(\varkappa-j)!\,(\varkappa+j)!\,(\nu-\varkappa)!}.$$

Die Koeffizienten A_{nj} sind danach also stets darstellbar als Summen von höchstens $(\nu-j+1)$ Gliedern.

In diesen letzten Darstellungen (22a) und (22b) tritt deutlich zutage, daß sich bei festgehaltenem j mit wachsendem n der Quotient $\frac{A_{n+1}}{A_n}$ dem Werte $\alpha = e^{-L}$ nähert. —

Erst durch diese Formeln (21) und (22) ist die Bestimmung der Koeffizienten A_{nj} des § 1 einschließlich der Konvergenzfrage erledigt.

Zusammenfassung: *Die Eigenwerte der Integralgleichung des § 1 sind die ungeraden positiven ganzen Zahlen:*

$$\lambda = 2\nu+1 \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots)$$

und zu einem solchen Eigenwerte gehören dann $2\nu+1$ Eigenfunktionen wie sie durch die Formeln (20) *oder* (20′) *definiert sind, in denen die Koeffizienten in den aus* (21) *oder auch* (22a) *oder* (22b) *ersichtlichen Bedeutungen stehen.*

§ 5.

Schlußfolgerungen.

Die soeben unter Anwendung der dipolaren Koordinaten bestimmten zu einem Eigenwerte $\lambda = 2\nu+1$ gehörigen $2\nu+1$ Eigenfunktionen u_ν und $v_{\nu j}$ müssen sich nun linear zusammensetzen aus den mit Hilfe der gewöhnlichen Polarkoordinaten ermittelt gedachten $2\nu+1$ Eigenfunktionen

$$(23) \qquad P_\nu(\cos\omega) \quad P_{\nu j}(\cos\omega)\cdot\begin{pmatrix}\cos j\varphi\\ \sin j\varphi\end{pmatrix} \qquad (j = 1, 2, \ldots,$$

gl. die Einleitung]. Lassen wir aber die Achse des gewöhnlichen Polar-
ordinatensystems in die Verlängerung der Pollinie des dipolaren Systems
llen, derart, daß dem Punkte $\vartheta = 0$ unserer Kugelfläche auch in ge-
öhnlichen Polarkoordinaten der Wert $\omega = 0$ entspricht, und also die
tzte Koordinate φ (geogr. Länge) in beiden Systemen dieselbe Bedeu-
ng hat, so lehrt die Betrachtung der von φ abhängigen Faktoren sofort,
ß die Funktionen $u_{\nu j}$ und $v_{\nu j}$ sich je von einer der Funktionen (23)
r durch einen konstanten Faktor unterscheiden können.

Zur Bestimmung dieser Faktoren wollen wir die Funktionen $u_{\nu j}$ und $v_{\nu j}$
ch normieren und dabei auch auf ihre Orthogonalitätseigenschaften ein-
hen:

Zunächst ist nach den bekannten Integraleigenschaften der Kreis-
nktionen klar, daß jedes u zu jedem v orthogonal ist, und ferner auch
zwei u (oder zwei v) zueinander, wenn nur ihre zweiten Indizes j von-
nander verschieden sind, gleichgültig, ob sie zu denselben oder zu ver-
hiedenen Eigenwerten (ersten Indizes) gehören. Es bleibt also nur noch
r Fall zweier u (bzw. zweier v) mit demselben zweiten Index j zu
tersuchen. Deshalb betrachten wir jetzt die (einander gleichen) Integrale

$$4) \qquad J_{\nu\nu'} = \int_{(\sigma)} u_{\nu j} u_{\nu' j}\, d\sigma \quad \text{und} \quad \int_{(\sigma)} v_{\nu j} v_{\nu' j}\, d\sigma,$$

nerstreckt über die ganze Oberfläche σ unserer Kugel; dabei können
r, was die Indizes ν und ν' anlangt, von vornherein ohne Beschränkung
r Allgemeinheit

$$\nu \geqq \nu'$$

nehmen. — Wenn wir dann die Koeffizienten der zu $\lambda' = 2\nu' + 1$ ge-
rigen Eigenfunktionen durch einen Akzent kenntlich machen, ergibt sich:

$$\nu' = \int_{(\sigma)} \psi^3 \Big(\sum_{n=j}^{\infty} (2n+1) A_{nj} P_{nj}(\mu) \Big) \Big(\sum_{n=j}^{\infty} (2n+1) A'_{nj} P_{nj}(\mu) \Big) \cos^2 j\varphi\, d\sigma,$$

er, da $d\sigma = \frac{4a^2}{\psi^2} d\mu\, d\varphi$ ist[10]):

$$4a^2 \int_0^{2\pi} \int_{-1}^{+1} \psi \Big(\sum_{n=j}^{\infty} (2n+1) A_{nj} P_{nj}(\mu) \Big) \Big(\sum_{n=j}^{\infty} (2n+1) A'_{nj} P_{nj}(\mu) \Big) \cos^2 j\varphi\, d\mu\, d\varphi.$$

Führen wir hier die Integration nach φ aus und berücksichtigen zu-
ich noch (A) S. 5, so folgt weiter:

---

[10]) Dies folgt leicht aus Formel (9) S. 65 im 120. Bd. von Crelles Journal.

$$J_{\nu\nu'} = 4a^2\varepsilon_j\pi\lambda(\beta-\alpha)\int_{-1}^{+1}\Big(\sum_{n=j}^{\infty}A_{nj}P_{nj}(\mu)\Big)\Big(\sum_{n=j}^{\infty}(2n+1)A'_{nj}P_{nj}(\mu)\Big)d\mu$$

$$(\varepsilon_0 = 2, \quad \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \ldots = 1).$$

Nach den bekannten Integraleigenschaften der zugeordneten Kugelfunktionen[11]) ist aber

$$(25)\qquad \int_{-1}^{+1}P_{nj}(\mu)P_{mj}(\mu)\,d\mu = \begin{cases} 0 & \text{sobald } m \neq n, \\ \dfrac{2}{2n+1}\cdot\dfrac{(n+j)!}{(n-j)!} & \text{,, } m = n, \end{cases}$$

und infolgedessen kann man $J_{\nu\nu'}$ auf folgende Form bringen:

$$(26)\qquad J_{\nu\nu'} = 8a^2\varepsilon_j\pi\lambda(\beta-\alpha)\sum_{n=j}^{\infty}\frac{(n+j)!}{(n-j)!}A_{nj}A'_{nj} \qquad (\lambda = 2\nu+1)$$

Diese letzte Summe bezeichnen wir nun mit S; dann ist nach den Darstellungen (21) für die Koeffizienten A_{nj}:

$$S = \frac{\alpha^{\nu+\nu'+1}}{(\beta-\alpha)^{2j}}\sum_{n=j}^{\infty}\frac{(n+j)!}{(n-j)!}\Big(\frac{1}{2\pi i}\int_{(\varrho_\alpha)}s^{n-j}\frac{(s-\beta)^{\nu+j}}{(s-\alpha)^{\nu-j+1}}\,ds\Big)\Big(\frac{1}{2\pi i}\int_{(\varrho_\alpha)}\sigma^{n-j}\frac{(\sigma-\beta)^{\nu'+j}}{(\sigma-\alpha)^{\nu'-j+1}}$$

Da nun aber

$$\sum_{n=j}^{\infty}\frac{(n+j)!}{(n-j)!}(s\sigma)^{n-j} \equiv (2j)!\Big[1+\frac{2j+1}{1}(s\sigma)+\frac{(2j+1)(2j+2)}{1\cdot 2}(s\sigma)^2+\ldots\Big]$$

$$= (2j)!(1-s\sigma)^{-(2j+1)}$$

ist, so kann man für S auch schreiben:

$$(27)\qquad S = \alpha^{\nu+\nu'+1}\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_{(\varrho_\alpha)}\frac{\Phi(\sigma)\,d\sigma}{(\sigma-\alpha)^{\nu'-j+1}},$$

wenn $\Phi(\sigma)$ in der Bedeutung steht:

$$\Phi(\sigma) = \frac{(2j)!(\sigma-\beta)^{\nu'+j}}{(\beta-\alpha)^{2j}}\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_{(\varrho_\infty)}\frac{(1-s\sigma)^{-(2j+1)}(s-\beta)^{\nu+j}}{(s-\alpha)^{\nu-j+1}}\,ds.$$

Danach ist aber $\Phi(\sigma)$, von Faktoren abgesehen, der Koeffizient von $(s-\alpha)^{\nu-j}$ bei einer Entwicklung der Funktion $(1-s\sigma)^{-(2j+1)}\cdot(s-\beta)^{\nu+j}$ in der Umgebung der Stelle $s=\alpha$, also

$$\frac{(\beta-\alpha)^{2j}}{(2j)!(\sigma-\beta)^{\nu'+j}}\Phi(\sigma) = \frac{1}{(\nu-j)!}\Big[\frac{d^{\nu-j}}{ds^{\nu-j}}\Big((1-s\sigma)^{-(2j+1)}(s-\beta)^{\nu+j}\Big)\Big]_{s=\alpha}$$

$$= \frac{1}{(\nu-j)!}\sum_{\varkappa=0}^{\nu-j}\binom{\nu-j}{\varkappa}\Big(\frac{(2j+\varkappa)!}{(2j)!}\sigma^{\varkappa}(1-\alpha\sigma)^{-(2j+\varkappa+1)}\Big)\Big(\frac{(\nu+j)!}{(2j+\varkappa)!}(\alpha-\beta)^{2j+\varkappa}\Big)$$

[11]) Vgl. z. B. F. Neumanns Vorlesungen [s. Anm. [1])], S. 79.

d daher $\Phi(\sigma)$ selbst:

$$\Phi(\sigma) = \frac{(\nu+j)!}{(\nu-j)!}\,\frac{(\sigma-\beta)^{\nu'+j}}{(1-\alpha\sigma)^{2j+1}}\sum_{\varkappa=0}^{\nu-j}\binom{\nu-j}{\varkappa}\left(\frac{\sigma(\alpha-\beta)}{1-\alpha\sigma}\right)^{\varkappa}.$$

ach dem binomischen Lehrsatz ist aber diese letztere Summe gleich

$$\left(1+\frac{\sigma(\alpha-\beta)}{1-\alpha\sigma}\right)^{\nu-j} = \left(\frac{1-\beta\sigma}{1-\alpha\sigma}\right)^{\nu-j} = \left(\frac{\alpha-\sigma}{\beta-\sigma}\right)^{\nu-j}\cdot\beta^{2(\nu-j)} \qquad (\text{da } \alpha\cdot\beta = 1)$$

d daher schließlich:

$$= \frac{(\nu+j)!}{(\nu-j)!}\,\frac{(\sigma-\beta)^{\nu'+j}}{(\beta-\sigma)^{2j+1}}\cdot\beta^{2j+1}\cdot\left(\frac{\sigma-\alpha}{\sigma-\beta}\right)^{\nu-j}\cdot\beta^{2(\nu-j)} = -\frac{(\nu+j)!}{(\nu-j)!}\,\beta^{2\nu+1}\,\frac{(\sigma-\alpha)^{\nu-j}}{(\sigma-\beta)^{\nu-\nu'+1}}.$$

Es beginnt also die Entwicklung der Funktion $\Phi(\sigma)$ nach steigenden otenzen von $(\sigma-\alpha)$ mit der $(\nu-j)$-ten Potenz, und es ist daher S, i. nach (27) im wesentlichen der Koeffizient der $(\nu'-j)$-ten Potenz in eser Entwicklung, stets gleich 0, sobald $\nu' < \nu$ ist, und damit ist all-mein das Resultat

8) $$J_{\nu\nu'} = 0 \quad \textit{sobald } \nu' \neq \nu$$

wiesen, oder *die Orthogonalität je zweier zu verschiedenen Eigenwerten hörigen Eigenfunktionen,* auch für den Fall gleicher zweiter Indizes in bester Übereinstimmung mit der allgemeinen Theorie.

In dem sodann noch zu untersuchenden Falle $\nu' = \nu$ ist der oeffizient von $(\sigma-\alpha)^{\nu'-j}$ in der Entwicklung von $\Phi(\sigma)$ gleich $\frac{(\nu+j)!}{(\nu-j)!}\,\frac{\beta^{2\nu+1}}{\alpha-\beta}$, und daher ist nach (27) wegen $\alpha\beta = 1$:

$$S = -\frac{(\nu+j)!}{(\nu-j)!}\,\frac{1}{\alpha-\beta},$$

d daraus folgt nach (26) weiter das Resultat:

9) $$J_{\nu\nu} = 8a^2\varepsilon_j\pi(2\nu+1)\frac{(\nu+j)!}{(\nu-j)!},$$

s wir jetzt benutzen wollen, um die Funktionen $u_{\nu j}$ und $v_{\nu j}$ zu nor-eren: Zu diesem Zwecke multiplizieren wir sie mit

$$\frac{1}{\sqrt{J_{\nu\nu}}} = \frac{1}{2a\sqrt{2\varepsilon_j\pi}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\nu+1}}\sqrt{\frac{(\nu-j)!}{(\nu+j)!}}.$$

nn müssen sie (bis auf höchstens das Vorzeichen) mit den Funktionen (23) ereinstimmen, wenn wir diese auch noch normieren. Da aber das serem $J_{\nu\nu}$ entsprechende, über die ganze Kugelfläche (R) hinerstreckte tegral dort

$$\int_{(\sigma)}(P_{\nu j}(x)\cos j\varphi)^2\,d\sigma = R^2\int_0^{2\pi}\int_{-1}^{+1}P_{\nu j}^2(x)\cos^2 j\varphi\,dx\,d\varphi \qquad (x=\cos\omega)$$

ist, und also nach (25) den Wert hat:

$$\varepsilon_j \pi R^2 \cdot \frac{2}{2\nu+1} \frac{(\nu+j)!}{(\nu-j)!} = \frac{8\varepsilon_j \pi a^2}{(\beta-\alpha)^2} \frac{1}{2\nu+1} \frac{(\nu+j)!}{(\nu-j)!},$$

so sind die Funktionen (23) nach ihrer Normierung folgendermaßen darstellbar:

$$(23') \quad \frac{\beta-\alpha}{2a\sqrt{2\varepsilon_j \pi}} \sqrt{2\nu+1} \sqrt{\frac{(\nu-j)!}{(\nu+j)!}} P_{\nu j}(\cos\omega) \cdot \begin{pmatrix} \cos j\varphi \\ \sin j\varphi \end{pmatrix} \quad (j = 0, 1, 2, \ldots, \nu),$$

und die Gleichsetzung dieser Funktionen mit den $\frac{u_{\nu j}}{\sqrt{J_{\nu\nu}}}$ bzw. $\frac{v_{\nu j}}{\sqrt{J_{\nu\nu}}}$ liefert uns dann sofort die interessante Formel:

$$(30) \qquad P_{\nu j}(\cos\omega) \begin{cases} = (-1)^\nu \sqrt{\psi} \sum_{n=j}^{\infty} A_{nj} P_{nj}(\cos\vartheta) & \text{oder aber} \\ = \frac{(-1)^\nu}{2\nu+1} \cdot \frac{\psi^{\frac{3}{2}}}{\beta-\alpha} \sum (2n+1) A_{nj} P_{nj}(\cos\vartheta), \end{cases}$$

welche also den *Zusammenhang zwischen den zugeordneten Kugelfunktionen mit den Argumenten* $\cos\omega$ *und* $\cos\vartheta$ angibt, wenn ω und ϑ die, die geographische Breite bestimmenden, Parameter desselben Kugelpunktes *in einem gewöhnlichen Polarkoordinatensystem bzw. in einem dipolaren Systeme bedeuten*[12]). [Wegen der gegenseitigen Lage der beiden Systeme vgl. den Anfang des Paragraphen, und wegen der Bedeutung der A_{nj} die Formeln (21) oder (22)].

Diese Formel (30) läßt sich nun (einschließlich des Vorzeichens) leicht auf ihre Richtigkeit prüfen. Doch wollen wir uns dabei auf den Fall $j = 0$, also den Fall der Legendreschen Polynome, beschränken: Wir setzen in (30) für die A_{n0} ihre Darstellungen (21) ein, dann folgt:

$$P_\nu(x) = (-1)^\nu \sqrt{\psi} \frac{\alpha^{\nu+\frac{1}{2}}}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_{(\varrho_\alpha)} s^n \frac{(s-\beta)^\nu}{(s-\alpha)^{\nu+1}} ds \right) P_n(\mu) \quad \begin{pmatrix} x = \cos\omega \\ \mu = \cos\vartheta \end{pmatrix},$$

oder unter Benutzung der bekannten Formel:

$$(31) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} s^n P_n(\mu) = \frac{1}{\sqrt{1-2s\mu+s^2}} \qquad (|s| < 1)$$

und der Tatsache, daß $\alpha\beta = 1$ ist:

$$P_\nu(x) = (-1)^\nu \sqrt{\alpha \cdot \psi} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{(\varrho_\alpha)} \frac{1}{\sqrt{1-2s\mu+s^2}} \frac{(\alpha s-1)^\nu}{(s-\alpha)^{\nu+1}} ds,$$

---

[12]) Bei der obigen Schlußweise bleibt das Vorzeichen in der Formel (30) noch unbestimmt. Die Richtigkeit der getroffenen Wahl läßt sich unschwer durch Nachprüfung in einem speziellen Falle, z. B. $\omega = 0$ ($\vartheta = 0$) feststellen, sie erhellt aber auch aus den noch folgenden Betrachtungen.

d dieses Integral können wir durch Einführung einer neuen Integrations-riablen z mittels der Gleichung

$$\frac{s-\alpha}{\alpha s-1} = -z$$

f die neue Form bringen:

$$P_\nu(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{(\varrho_0)} \sqrt{\frac{1-2\alpha\mu+\alpha^2}{(\alpha z+1)^2-2(\alpha z+1)(z+\alpha)\mu+(z+\alpha)^2}}\,\frac{dz}{z^{\nu+1}},$$

der es jetzt hinzuerstrecken ist über einen kleinen Kreis (ϱ_0) um den ıllpunkt. — Danach sind *die* $P_\nu(x) \equiv P_\nu(\cos\omega)$ *gerade die Koeffizienten der Entwicklung der unter dem Integrale stehenden (positiven) Quadrat-ırzel nach steigenden Potenzen von* z, es gilt also:

2) $$\sqrt{\frac{1-2\alpha\cos\vartheta+\alpha^2}{(\alpha z+1)^2-2(\alpha z+1)(z+\alpha)\cos\vartheta+(z+\alpha)^2}} = \sum_{\nu=0}^{\infty} z^\nu P_\nu(\cos\omega),$$

d mit Rücksicht auf (31) muß daher diese Quadratwurzel gleich $\frac{1}{\sqrt{1-2z\cos\omega+z^2}}$ sein, und in der Tat bestätigt eine einfache Umrechnung n gewöhnlichen Polarkoordinaten auf dipolare Koordinaten die Richtig-it dieser aus (30) gezogenen Folgerung und damit auch die Richtigkeit r Formel (30) selber, wenigstens im Spezialfalle $j = 0$.

Ist $j > 0$, so liefert uns eine entsprechende Behandlung der Formel (30) s zu (32) analoge Resultat:

2′) $$\frac{(2j)!}{2^j\cdot j!}(1-\alpha^2)^j \frac{\sqrt{1-2\alpha\cos\vartheta+\alpha^2}\,(\sin\vartheta)^j}{\sqrt{(\alpha z+1)^2-2(\alpha z+1)(z+\alpha)\cos\vartheta+(z+\alpha)^2}^{2j+1}}$$

$$= \sum_{\nu=j}^{\infty} z^{\nu-j} P_{\nu j}(\cos\omega),$$

s sich auch wieder leicht direkt bestätigen läßt.

(Eingegangen am 24. Juni 1919.)

Konvergenzdefekte der Potenzreihen stetiger Funktionen auf dem Rande des Konvergenzkreises.

Von

Ludwig Neder in Göttingen.

Unter der *Potenzreihe einer stetigen Funktion* wollen wir eine Reihe nach ganzen Potenzen von z verstehen, die einen Konvergenzradius ≥ 1 besitzt, und deren Summe — erforderlichenfalls nach Ergänzung der Definition in Randpunkten des Einheitskreises — für $|z| \leq 1$ stetig ist in bezug auf diese Punktmenge. Für $z = e^{it}$, wo t reell, sind die Komponenten einer solchen Potenzreihe identisch mit einem Paar von konjugierten[1]) Fourierreihen stetiger Funktionen und umgekehrt. Aus diesem Grunde sind die Potenzreihen stetiger Funktionen ein Analogon zu den Fourierreihen stetiger Funktionen.

Nun hat bekanntlich Du Bois-Reymond[2]) eine stetige (reelle) Funktion der (reellen) unabhängigen Veränderlichen t angegeben, bei deren Fourierreihe $\mathfrak{F}(t)$ in *mindestens abzählbar vielen, überall dicht liegenden Punkten* des Intervalls $(0, 2\pi)$ die Partialsummen nicht beschränkt sind, und Herr Fejér[3]) gab die erste Potenzreihe $\mathfrak{P}(z)$ einer stetigen Funktion, bei der für $z = e^{it}$ (t reell) dasselbe stattfindet. Herr Steinhaus fand dann einen Beweis[4]) dafür, daß jede Reihe $\mathfrak{F}(t)$ bzw. $\mathfrak{P}(e^{it})$ der vorgenannten Art *in jedem Teilintervall von* $(0, 2\pi)$ *konti-*

[1]) Diese Bezeichnung sei gestattet, obwohl die Beziehung zwischen einer trigonometrischen Reihe $\mathfrak{T}(t)$ und ihrer konjugierten nicht symmetrisch ist: Denn wenn die zu $\mathfrak{T}(t)$ konjugierte Reihe $\overline{\mathfrak{T}}(t)$ heißt, so ist die zu $\overline{\mathfrak{T}}(t)$ konjugierte Reihe $-\mathfrak{T}(t)$, und nicht $\mathfrak{T}(t)$.

[2]) Abh. d. math.-phys. Cl. d. K. Bayer. Akad. d. W., 12 (1876), II. Abth., S. 100. Die Schlußweise Du Bois-Reymonds kann übrigens nicht als bindend angesehen werden, ein Punkt, auf den Verf. noch zurückzukommen hofft.

[3]) Sitzungsber. d. math.-phys. Kl. d. K. Bayer. Akad. d. W. 1910 (1910), 3. Abh.

[4]) Siehe des Verf. Inauguraldiss. *Zur Konvergenz der trigonometrischen Reihen, einschließlich der Potenzreihen auf dem Konvergenzkreise.* Göttingen; eingereicht 1914, gedruckt 1919, S. 26 [§] 3. Ob Herr Steinhaus (der sich übrigens auf die Betrachtung von Fourierreihen beschränkt) seinen Beweis (nach dem 1. August 1914)

ıierlich viele Divergenzpunkte besitzt[5]), und daß also in der Literatur eder eine Fourierreihe einer stetigen Funktion mit *genau abzählbar elen, in* $(0,2\pi)$ *überall dicht liegenden* Divergenzpunkten existiert, noch ıs entsprechende Beispiel einer Potenzreihe.

Solche Beispiele zu erhalten ist nicht schwer, nachdem einmal die ıfmerksamkeit darauf gelenkt ist, und es hat Herr Steinhaus bereits 912 eine derartige *Fourierreihe* gefunden[6]).

Im folgenden soll eine *analoge Potenzreihe einer stetigen Funktion* gegeben werden (s. u. § 2). Die dabei benutzte Konstruktion ist ein ezialfall des Verfahrens, das in des Verf. Inauguraldissertation eine ihe von bemerkenswerten Beispielen[7]) liefert, und ergibt zugleich eine ourierreihe mit den Eigenschaften des Steinhausschen Beispiels.

Sie gestattet ferner, das am genannten Orte erstmalig erhaltene ispiel[8]) einer *Potenzreihe einer stetigen Funktion, die auf dem Konrgenzkreise ausnahmslos konvergiert, jedoch ungleichmäßig auf jedem ilbogen desselben*, durch Unterdrückung einer Kondensation derart erblich zu vereinfachen, daß die Wiedergabe desselben (s. u. § 3) der ihe wert erscheint. Wie a. a. O. ergibt sich auch hier zugleich eine tige Funktion, deren Fourierreihe *auf der reellen Achse ausnahmslos nvergiert, jedoch ungleichmäßig in jedem Intervall*, und auch dieses ispiel ist wesentlich kürzer als das erste, von Herrn Steinhaus[9]) angebene Beispiel gleicher Art.

derweitig veröffentlicht hat, vermag Verf. nicht zu sagen, da Herr St. z. Zt. nicht eichbar ist. [Zusatz b. d. Korr.: In einer demnächst im Krakauer Bulletin erscheiıden Arbeit gibt Herr St. einen allgemeineren Satz, aus dem die erwähnte Tatsache gt, und verweist dort im übrigen auf seinen am vorgen. Orte veröffentlichten Beweis.]

[5]) Ebensolche, sowie andere (s. Anm. 7) Beispiele mit kontinuierlich vielen Digenzpunkten fand Verf. *vor* Bekanntschaft mit dem Steinhausschen Beweise. a. O. S. 25 [§] 2.

[6]) Die Beschaffenheit des Beispiels ist dem Verf. nicht bekannt, auch nichts über, ob Herr St. dasselbe bisher veröffentlicht hat oder nicht. [Zusatz b. d. Korr.: s Beispiel wird an der im Zusatz zu [4]) gen. Stelle erscheinen.]

[7]) Hier seien nur genannt: Fourierreihe einer stetigen Funktion, deren Diverzpunkte eine perfekte, nirgends dichte Teilmenge des Intervalls $(0,2\pi)$ bilden.

Potenzreihe einer stetigen Funktion, bei der für $z = e^{it}$ (t reell) dasselbe gilt, daß die Reihe den Einheitskreis zum Konvergenzkreis hat.

Potenzreihe einer stetigen Funktion, die auf dem Konvergenzkreise $|z| = 1$ ausmslos konvergiert, jedoch ungleichmäßig auf jedem Teilbogen desselben.

Fourierreihe $\mathfrak{F}(t)$ einer stetigen Funktion, die in $(0,2\pi)$ ausnahmslos konvert, während dort das (stets unter 2π liegende) Maß der Menge der Punkte, wo der d der ungleichmäßigen Konvergenz von $\mathfrak{F}(t)$ unendlich ist, beliebig nahe an 2π liegt.

Entsprechende Potenzreihe einer stetigen Funktion.

[8]) A. a. O. S. 32—38.

[9]) Sur la convergence non-uniforme des séries de Fourier. Bull. Intern. de . des Sc. de Cracovie. Cl. des Sc. Math. et Nat. Série A: Sciences Math. 1912 13), S. 145—160.

§ 1.

Definition der Beispiele.

Es sei

$$m_\nu = 2^{\nu^2}, \quad M_\nu = 2\sum_{\alpha=1}^{\nu-1} m_\alpha \quad [10] \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots) \tag{1}$$

Wir betrachten zunächst die Fejérsche Kosinussumme

$$\varphi_\nu(t) = \sum_{k=M_\nu+1}^{M_{\nu+1}} \frac{\cos kt}{M_\nu + m_\nu + \frac{1}{2} - k} \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots)$$

und das Fejérsche Polynom

$$f_\nu(z) = \sum_{k=M_\nu+1}^{M_{\nu+1}} \frac{z^k}{M_\nu + m_\nu + \frac{1}{2} - k} \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots) \tag{2}$$

Dann ist offenbar

$$\varphi_\nu(t) = \Re f_\nu(e^{it}) \qquad (t \text{ reell}; \nu = 1, 2, 3, \ldots)$$

und es existiert[11] eine absolute Konstante Γ derart, daß

$$|\varphi_\nu(t)| \leqq |f_\nu(e^{it})| \leqq \Gamma \quad (t \text{ reell}; \nu = 1, 2, 3, \ldots) \tag{3}$$

Für $\nu = 1, 2, 3, \ldots$ sei nunmehr t_ν eine beliebige reelle Zahl, $0 \leqq \varepsilon_\nu \leqq 1$ und

$$\varphi(t) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_\nu}{\nu^2} \varphi_\nu(t - t_\nu) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_\nu}{\nu^2} \sum_{k=M_\nu+1}^{M_{\nu+1}} \frac{\cos k(t - t_\nu)}{M_\nu + m_\nu + \frac{1}{2} - k}, \tag{4}$$

$$f(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_\nu}{\nu^2} f_\nu(z e^{-it_\nu}) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_\nu}{\nu^2} \sum_{k=M_\nu+1}^{M_{\nu+1}} \frac{(z e^{-it_\nu})^k}{M_\nu + m_\nu + \frac{1}{2} - k}. \tag{5}$$

Diese Reihen konvergieren wegen (3) gleichmäßig für alle reellen t. Daher ist[12] $\varphi(t)$ eine für alle reellen t stetige reelle Funktion mit der Periode 2π, deren Fourierreihe $\mathfrak{F}(t)$ man einfach durch Auflösen der inneren Summenzeichen von (4) erhält, und entsprechend[12] $f(z)$ eine für $|z| \leqq 1$ stetige Funktion und für $|z| < 1$ überdies die Summe einer Potenzreihe $\mathfrak{P}(z)$, also $\mathfrak{P}(z)$ nach der zu Anfang verabredeten Bezeichnungsweise die Potenzreihe einer stetigen Funktion, und man erhält $\mathfrak{P}(z)$ aus (5) durch Auflösen der inneren Summenzeichen. Ferner stimmt, wie der Vergleich zwischen (4) und (5) unmittelbar ergibt, $\mathfrak{F}(t)$ gliedweise mit dem Realteil von $\mathfrak{P}(e^{it})$ überein.

---

[10]) D. h. für $\nu = 1$. . Es sei $M_1 = 0$.

[11]) Vgl. Fejér l. c. bzw. des Verf. Diss. S. 16 ff. [§ 3.

[12]) A. a. O. S. 18 ff. [§] 4.

§ 2.

Divergenz in genau abzählbar vielen Punkten.

Es seien die Zahlen ϑ_ϱ $(\varrho = 1, 2, 3, \ldots)$ dem Intervall $\{0 \leqq t < 2\pi\}$ gehörig, zu je zweien verschieden, und im Intervalle $(0, 2\pi)$ überall cht. Dann bilden wir aus ihnen eine neue Zahlfolge, in der jedes ϑ_ϱ endlich oft auftritt, z. B. in folgender Anordnung:

$$\vartheta_1, \vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_1, \vartheta_3, \vartheta_3, \vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3, \vartheta_4, \ldots$$

ir definieren also eine von ν abhängige, positive ganze Zahl $\varrho(\nu)$ durch e Festsetzung

$$\varrho(\nu) = \nu - \binom{n}{2} \text{ für } \binom{n}{2} < \nu \leqq \binom{n+1}{2} \text{ und } n = 1, 2, 3, \ldots$$

d betrachten die Folge $\vartheta_{\varrho(\nu)}$ $(\nu = 1, 2, 3, \ldots)$.

Nunmehr setzen wir in (4) und (5)

$$\varepsilon_\nu = \frac{1}{\varrho(\nu)}, \quad t_\nu = \vartheta_{\varrho(\nu)} \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots)$$

d erhalten zwei Funktionen

$$\varphi(t) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^2 \cdot \varrho(\nu)} \sum_{k=M_\nu+1}^{M_{\nu+1}} \frac{\cos k(t - \vartheta_{\varrho(\nu)})}{M_\nu + m_\nu + \frac{1}{2} - k}$$

$$f(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^2 \cdot \varrho(\nu)} \sum_{k=M_\nu+1}^{M_{\nu+1}} \frac{(z e^{-i\vartheta_{\varrho(\nu)}})^k}{M_\nu + m_\nu + \frac{1}{2} - k}$$

t den in § 1 genannten Eigenschaften und der Fourierreihe $\mathfrak{F}(t)$, bzw. : Potenzreihe $\mathfrak{P}(z)$. Von diesen Reihen wollen wir folgendes nachisen:

$\mathfrak{F}(t)$ und $\mathfrak{P}(e^{it})$ sind

a) *für* $t = \vartheta_\varrho$ $(\varrho = 1, 2, 3, \ldots)$ *divergent*[13]),

b) *für* $0 \leqq t < 2\pi$ *und* $t \neq \vartheta_\varrho$ $(\varrho = 1, 2, 3, \ldots)$ *konvergent.*

Wegen der gliedweisen Übereinstimmung zwischen $\mathfrak{F}(t)$ und dem alteil von $\mathfrak{P}(e^{it})$ genügt es hierbei, Eigenschaft a) für $\mathfrak{F}(t)$ und Eigenaft b) für $\mathfrak{P}(e^{it})$ zu beweisen.

Nachweis der Eigenschaft a) *für* $\mathfrak{F}(t)$. Es sei $\varrho = \varrho'$ beliebig, aber fest ählt und die positive ganze Zahl $n \geqq \varrho'$, also $\binom{n}{2} < \binom{n}{2} + \varrho' \leqq \binom{n+1}{2}$. r betrachten diejenige Teilfolge der ν, wofür

$$\nu = \nu_{\varrho', n} = \binom{n}{2} + \varrho', \text{ also } \varrho(\nu) = \varrho', \ \vartheta_{\varrho(\nu)} = \vartheta_{\varrho'}$$

[13]) Aus diesem Grunde hat $\mathfrak{P}(z)$ den Einheitskreis zum Konvergenzkreis.

ist. Dann ist (für $n = \varrho', \varrho'+1, \varrho'+2, \dots$) *einerseits* der Ausdruck

$$\frac{1}{\nu^2 \cdot \varrho(\nu)} \sum_{k=M_\nu+1}^{M_\nu+m_\nu} \frac{\cos k(t-\vartheta_{\varrho(\nu)})}{M_\nu+m_\nu+\frac{1}{2}-k} \qquad (\nu = \nu_{\varrho',n}),$$

wegen (1) eine Sequenz aus $\mathfrak{F}(t)$ mit dem beliebig großen Anfangsindex

$$M_\nu+1 \geqq 2(\nu-1)+1 \geqq \nu > \binom{n}{2} \qquad (\nu = \nu_{\varrho',n}),$$

andererseits sein Wert für $t = \vartheta_{\varrho'} = \vartheta_{\varrho(\nu)}$ $(\nu = \nu_{\varrho',n})$

$$\frac{1}{\nu^2 \cdot \varrho'} \sum_{k=M_\nu+1}^{M_\nu+m_\nu} \frac{1}{M_\nu+m_\nu+\frac{1}{2}-k} \geqq \frac{1}{\nu^2 \cdot \varrho'} \log m_\nu = \frac{\log 2}{\varrho'} \qquad (\nu = \nu_{\varrho',n}),$$

und es kann hiernach $\mathfrak{F}(\vartheta_{\varrho'})$ nicht konvergieren.

Nachweis der Eigenschaft b) *für* $\mathfrak{P}(e^{it})$. Wir stellen zunächst zwei Abschätzungen auf:

Es seien p und ν positive ganze Zahlen, m_ν und M_ν durch (1) definiert, und $M_\nu < p \leqq M_{\nu+1} = M_\nu + 2m_\nu$. Dann ist

1) für $|x| = 1$

$$(8) \qquad \left| \sum_{k=M_\nu+1}^{p} \frac{x^k}{M_\nu+m_\nu+\frac{1}{2}-k} \right| \leqq \sum_{k=M_\nu+1}^{M_\nu+2m_\nu} \left| \frac{1}{M_\nu+m_\nu+\frac{1}{2}-k} \right|$$

$$= 2 \sum_{k=1}^{m_\nu} \frac{1}{k-\frac{1}{2}} \leqq 4(1+\log m_\nu) \leqq 8\nu^2,$$

2) für $|x| = 1$, aber $x \neq 1$, wie sich durch partielle Summation ergibt,

$$(9) \qquad \left| \sum_{k=M_\nu+1}^{p} \frac{x^k}{M_\nu+m_\nu+\frac{1}{2}-k} \right| = \left| \sum_{k=1}^{p-M_\nu} \frac{x^k}{m_\nu+\frac{1}{2}-k} \right|$$

$$\leqq \frac{2}{|1-x|} \left(\sum_{k=1}^{p-M_\nu} \left| \frac{1}{m_\nu+\frac{1}{2}-k} - \frac{1}{m_\nu+\frac{1}{2}-(k+1)} \right| + \frac{1}{\frac{1}{2}} \right) \leqq \frac{20}{|1-x|}.$$

Nunmehr sei t eine feste Zahl, $0 \leqq t < 2\pi$ und $t \neq \vartheta_\varrho$ $(\varrho = 1, 2, 3, \dots)$, ferner p eine Zahl der Reihe $1, 2, 3, \dots$, $S_p(e^{it})$ die p-te Partialsumme von $\mathfrak{P}(e^{it})$, und μ die größte unter den ganzen Zahlen ν der Art, daß $M_\nu < p$ ist, also

$$(10) \qquad M_\mu < p \leqq M_{\mu+1}.$$

Dann ist nach (7)

$$(11) \quad \bar{f}(e^{it}) - S_p(e^{it}) = \sum_{\nu=\mu}^{\infty} \frac{1}{\nu^2 \cdot \varrho(\nu)} \sum_{k=M_\nu+1}^{M_{\nu+1}} \frac{(e^{i(t-\vartheta_{\varrho(\nu)})})^k}{M_\nu+m_\nu+\frac{1}{2}-k} - \frac{1}{\mu^2 \cdot \varrho(\mu)} \sum_{k=M_\mu+1}^{p} \frac{(e^{i(t-\vartheta_{\varrho}}}{M_\mu+m_\mu}$$

Hierin ist das allgemeine Glied der ersten Summe auf der rechten ite zufolge (2) gleich $\frac{1}{\nu^2 \cdot \varrho(\nu)} f_\nu(e^{i(t-\vartheta_{\varrho(\nu)})})$, also mit Rücksicht auf (3) solut genommen

2) $$\leqq \frac{\Gamma}{\nu^2}.$$

Um das letzte Glied Ω von (11) abzuschätzen, verstehen wir, wenn > 0 gegeben ist, unter d die kleinste der nach Voraussetzung sämtlich sitiven Zahlen $|1 - e^{i(t-\vartheta_\varrho)}|$, wo $\varrho = 1, 2, \ldots \left[\frac{1}{\delta}\right]$, und unterscheiden vei Fälle:

Falls $\varrho(\mu) > \frac{1}{\delta}$, so ist nach Abschätzung (8)

$$|\Omega| \leqq \frac{\delta}{\mu^2} \cdot 8\mu^2 = 8\delta.$$

Falls dagegen $\varrho(\mu) \leqq \frac{1}{\delta}$, so ist nach Abschätzung (9) und der De- nition von d

$$|\Omega| \leqq \frac{1}{\mu^2} \cdot \frac{20}{|1 - e^{i(t-\vartheta_{\varrho(\mu)})}|} \leqq \frac{20\,/\,d}{\mu^2}.$$

Daher ist in allen Fällen

$$|f(e^{it}) - S_p(e^{it})| \leqq \sum_{\nu=\mu}^{\infty} \frac{\Gamma}{\nu^2} + \frac{20\,/\,d}{\mu^2} + 8\delta,$$

nd dies ist $< 9\delta$, sobald p, und damit zufolge (10) auch μ, genügend roß ist.

§ 3.

Ausnahmslose, jedoch überall ungleichmäßige Konvergenz.

Es mögen ϑ_ϱ $(\varrho = 1, 2, 3, \ldots)$ und $\varrho(\nu)$ $(\nu = 1, 2, 3, \ldots)$ dieselbe edeutung haben wie in § 2. Dann setzen wir in (4) und (5)

$$\varepsilon_\nu = \frac{1}{\varrho(\nu)}, \quad t_\nu = \vartheta_{\varrho(\nu)} + \frac{1}{\nu} \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots)$$

nd erhalten zwei Funktionen

3) $$\varphi(t) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^2 \cdot \varrho(\nu)} \sum_{k=M_\nu+1}^{M_{\nu+1}} \frac{\cos k(t - \vartheta_{\varrho(\nu)} - 1/\nu)}{M_\nu + m_\nu + \frac{1}{2} - k}$$

4) $$f(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^2 \cdot \varrho(\nu)} \sum_{k=M_\nu+1}^{M_{\nu+1}} \frac{(z\, e^{-i(\vartheta_{\varrho(\nu)} + 1/\nu)})^k}{M_\nu + m_\nu + \frac{1}{2} - k}$$

it den zu Ende des § 1 genannten Eigenschaften und der Fourierreihe (t) bzw. der Potenzreihe $\mathfrak{P}(z)$. Von diesen Reihen wollen wir folgendes achweisen:

$\mathfrak{F}(t)$ *und* $\mathfrak{P}(e^{it})$ *konvergieren*

a) *ausnahmslos für* $0 \leqq t < 2\pi$,

b) *in jedem Teilintervall von* $(0,2\pi)$[14]) *ungleichmäßig*[13]).

Wegen der gliedweisen Übereinstimmung zwischen $\mathfrak{F}(t)$ und dem Realteil von $\mathfrak{P}(e^{it})$ genügt es, Eigenschaft a) für $\mathfrak{P}(e^{it})$ und Eigenschaft b) für $\mathfrak{F}(t)$ zu beweisen.

Nachweis der Eigenschaft a) *für* $\mathfrak{P}(e^{it})$. Es sei t eine feste Zahl des Intervalls $\{0 \leqq t < 2\pi\}$, p eine Zahl der Reihe 1, 2, 3, ..., $S_p(e^{it})$ die p-te Partialsumme von $\mathfrak{P}(e^{it})$, und μ definiert wie vorhin. Dann ist nach (14)

$$f(e^{it}) - S_p(e^{it}) = \sum_{\nu=\mu}^{\infty} \frac{1}{\nu^2 \cdot \varrho(\nu)} \sum_{k=M_\nu+1}^{M_{\nu+1}} \frac{(e^{i(t-\vartheta_{\varrho(\nu)}-1/\nu)})^k}{M_\nu + m_\nu + \frac{1}{2} - k} + \frac{1}{\mu^2 \cdot \varrho(\mu)} \sum_{k=M_\mu+1}^{p} \frac{(e^{i(t-\vartheta_{\varrho(\mu)}-1/}}{M_\mu + m_\mu + \frac{1}{2}}$$

Hierin gilt für das allgemeine Glied der ersten Summe auf der rechten Seite wieder die Abschätzung (12).

Um das letzte Glied Ω der rechten Seite abzuschätzen, verstehen wir, wenn $\delta > 0$ gegeben ist, unter $2d'$ die kleinste unter den Zahlen $|1 - e^{i(t-\vartheta_\varrho)}|$, wofür $\varrho = 1, 2, \ldots \left[\frac{1}{\delta}\right]$ und $\vartheta_\varrho \neq t$ ist, also eine positive Zahl, und unterscheiden mehrere Fälle:

Falls $\varrho(\mu) > \frac{1}{\delta}$ ist, gibt die Abschätzung (8)

$$\Omega| \leqq \frac{\delta}{\mu^2} \cdot 8\mu^2 = 8\delta.$$

Falls dagegen $\varrho(\mu) \leqq \frac{1}{\delta}$, so ist $\vartheta_{\varrho(\mu)}$ eine der endlich vielen Zahlen $\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots, \vartheta_{\left[\frac{1}{\delta}\right]}$, und wir haben zwei Unterfälle:

1) $\vartheta_{\varrho(\mu)} = t$. Dann ist nach Abschätzung (9)

$$|\Omega| \leqq \frac{1}{\mu^2} \cdot \frac{20}{|1 - e^{-i/\mu}|} = \frac{10}{\mu^2 \sin\frac{1}{2\mu}}.$$

2) $\vartheta_{\varrho(\mu)} \neq t$. Dann ist für $\mu \geqq 1/d'$

$$|1 - e^{i(t-\vartheta_{\varrho(\mu)}-1/\mu)}| \geqq |1 - e^{i(t-\vartheta_{\varrho(\mu)})}| - |1 - e^{-i/\mu}| \geqq d',$$

so daß Abschätzung (9) ergibt

$$|\Omega| \leqq \frac{1}{\mu^2} \cdot \frac{20}{|1 - e^{i(t-\vartheta_{\varrho(\mu)}-1/\mu)}|} \leqq \frac{20/d'}{\mu^2} \qquad (\mu \geqq 1/d').$$

Wenn wir also die Ergebnisse zusammenfassen, so finden wir für alle großen μ

[14]) Auf die Betrachtung solcher Intervalle darf man sich offenbar beschränken.

$$|f(e^{it}) - S_p(e^{it})| \leqq \sum_{\nu=\mu}^{\infty} \frac{\Gamma}{\nu^2} + \frac{10}{\mu^2 \sin\frac{1}{2\mu}} + \frac{20\,|d'}{\mu^2} + 8\delta,$$

und dies ist $< 9\delta$, sobald p, und damit zufolge (10) auch μ, genügend groß ist.

Nachweis der Eigenschaft b) *für* $\mathfrak{F}(t)$. Es sei (α, β) ein Teilintervall von $(0, 2\pi)$, ϱ' so festgelegt, daß $\vartheta_{\varrho'}$ Innenpunkt von (α, β) ist, und $n \geqq \varrho'$, also $\binom{n}{2} < \binom{n}{2} + \varrho' \leqq \binom{n+1}{2}$. Dann betrachten wir wieder diejenigen ν, wofür

$$\nu = \nu_{\varrho', n} = \binom{n}{2} + \varrho' \quad \text{also} \quad \varrho(\nu) = \varrho', \quad \vartheta_{\varrho(\nu)} = \vartheta_{\varrho'}$$

ist. Dann ist (für $n = \varrho', \varrho' + 1, \varrho' + 2, \ldots$) *erstens* der Ausdruck

$$\frac{1}{\nu^2 \cdot \varrho(\nu)} \sum_{k=M_\nu+1}^{M_\nu+m_\nu} \frac{\cos k\,(t - \vartheta_{\varrho(\nu)} - 1/\nu)}{M_\nu + m_\nu + \frac{1}{2} - k} \qquad (\nu = \nu_{\varrho', n})$$

wegen (1) eine Sequenz aus $\mathfrak{F}(t)$ mit dem beliebig großen Anfangsindex $M_\nu + 1 \geqq \binom{n}{2}$, *zweitens* sein Wert für $t = \vartheta_{\varrho'} + \frac{1}{\nu} = \vartheta_{\varrho(\nu)} + \frac{1}{\nu}$

$$\frac{1}{\nu^2 \cdot \varrho'} \sum_{k=M_\nu+1}^{M_\nu+m_\nu} \frac{1}{M_\nu + m_\nu + \frac{1}{2} - k} \geqq \frac{\log 2}{\varrho'} \qquad (\nu = \nu_{\varrho', n}),$$

und es gehört *drittens* für alle großen n wegen $\nu \geqq \binom{n}{2}$ der Punkt $\vartheta_{\varrho'} + \frac{1}{\nu}$ dem Intervalle (α, β) an, womit die gleichmäßige Konvergenz von $\mathfrak{F}(t)$ im Intervall (α, β) ausgeschlossen ist.

Göttingen, den 11. Juni 1919.

(Eingegangen am 26. Juni 1919.)

Über die Fourierkoeffizienten der Funktionen von beschränkter Schwankung.

Von

Ludwig Neder in Göttingen.

Im nachstehenden ist nur von reellen Funktionen einer reellen unabhängigen Veränderlichen x die Rede.

Herr F. Riesz hat in einer kürzlich erschienenen Arbeit[1]) das erste Beispiel einer mod 2π periodischen, überall stetigen Funktion von (im Intervall $(0,2\pi)$) beschränkter Schwankung angegeben, für deren Fourierkoeffizienten nicht zugleich

$$(1) \qquad a_n = o\left(\frac{1}{n}\right), \qquad b_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$$

ist, und sagt am Ende derselben: „Zum Schlusse möchte ich noch folgende Fragen aufwerfen, die mir schon für schwerer zugänglich scheinen: Gibt es eine stetige, nach 2π periodische Funktion von beschränkter Schwankung, für welche die Folgen $\{na_n\}$, $\{nb_n\}$ konvergieren und wenigstens einer der beiden Grenzwerte von Null verschieden ist? Gibt es eine unstetige Funktion von beschränkter Schwankung, für welche $a_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$, $b_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$ ist? Die beiden Fragen hängen miteinander eng zusammen."

Nach einer Bemerkung, die ich Herrn Landau verdanke, ist die zweite Frage in der obigen Fassung zu bejahen: Denn wenn man der Funktion $f(x) = 0$, für die $a_n = b_n = 0$ ist, durch Abänderung *eines* Funktionswertes eine sog. hebbare Unstetigkeit beibringt, so bleiben die Fourierkoeffizienten ungeändert und man erhält ein Beispiel der in Frage stehenden Art.

Dagegen wird im folgenden gezeigt (§ 1), daß es keine Funktion von beschränkter Schwankung und mit $a_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$, $b_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$ gibt, die an-

[1]) Über die Fourierkoeffizienten einer stetigen Funktion von beschränkter Schwankung [Math. Zeitschr. 2 (1918), S. 312].

dere als hebbare Unstetigkeiten besitzt. Darauf (§ 2) wird in zweierlei Art bewiesen, daß die erste der obenstehenden Fragen zu verneinen ist.

§ 1.

Satz. *Erfüllen die Fourierkoeffizienten a_n, b_n einer mod 2π periodischen Funktion $f(x)$ von (im Intervall $(0,2\pi)$) beschränkter Schwankung die Beziehungen* (1), *so besitzt $f(x)$ höchstens hebbare Unstetigkeiten*

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit nehmen wir $a_0 = 0$ an. Dann ist bekanntlich[2]) für alle (reellen) x

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt = C + \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{b_n}{n} \cos nx + \frac{a_n}{n} \sin nx \right),$$

wobei der Wert von C hier nicht interessiert. Setzen wir jetzt

$$a_n = -\frac{\beta_n}{n}, \quad b_n = \frac{\alpha_n}{n} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots),$$

wobei nach (1)

$$\alpha_n \to 0, \quad \beta_n \to 0,$$

so ergibt sich

$$F(x) = C + \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{\alpha_n}{n^2} \cos nx - \frac{\beta_n}{n^2} \sin nx \right). \tag{2}$$

Es geht also $F(x)$ durch zweimalige gliedweise Integration aus einer trigonometrischen Reihe mit nach Null strebenden Koeffizienten hervor. Auf Reihen dieser letzteren Art bezieht sich aber gerade Riemanns klassische Theorie[3]), und zwar ist unser $F(x)$ der Spezialfall $A_0 = C' = 0$ der von Riemann so bezeichneten Funktion.

Nun betrachten wir bei beliebigem, aber fest gewähltem x und für $h > 0$ den Ausdruck

$$J(h) = \frac{1}{2h} \int_0^{2h} \{f(x+t) - f(x-t)\}\,dt, \tag{3}$$

der wegen der Bedeutung von $F(x)$

$$= \frac{F(x+2h) - 2F(x) + F(x-2h)}{2h}$$

ist. Nach Riemanns „Lehrsatz 2“ hat daher $J(h)$ bei $h \to 0$ den Grenz-

[2]) Vgl. etwa A. Hurwitz, Über die Fourierschen Konstanten integrierbarer Funktionen [Math. Ann. 57 (1903), S. 425], § 7.

[3]) Über die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe Ges. Werke . In Frage kommt speziell Art. 8

wert Null. Bezeichnet man also Funktionen von h, die diese Eigenschaft besitzen, generell mit $\varepsilon_\nu(h)$ $(\nu = 1, 2, 3, \ldots)$, so ist zunächst

$$J(h) = \varepsilon_1(h). \tag{4}$$

Andererseits ist nach Voraussetzung $f(x)$ von beschränkter Schwankung in $(0,2\pi)$ und also in jedem endlichen Intervall; $f(x)$ besitzt deshalb im Punkte x Grenzwerte von rechts und von links, die wir in üblicher Weise mit $f(x \pm 0)$ bezeichnen. Es ist daher für $t > 0$

$$f(x+t) - f(x-t) = f(x+0) - f(x-0) + \varepsilon_2(t),$$

also ($\varepsilon_2(t)$ integrierbar und) nach (3)

$$J(h) = f(x+0) - f(x-0) + \frac{1}{2h}\int_0^{2h} \varepsilon_2(t)\,dt$$

und hieraus folgt in Verbindung mit (4)

$$f(x+0) - f(x-0) = \varepsilon_3(h), \text{ d. h. } = 0.$$

Die Funktion $f(x)$ besitzt also in jedem Punkte von rechts und links denselben Grenzwert, ist also entweder stetig oder hebbar unstetig.

§ 2.

Jetzt ist leicht zu zeigen, daß die erste der von Herrn F. Riesz gestellten Fragen zu verneinen ist:

Ist nämlich $f(x)$ eine mod 2π periodische, überall stetige Funktion von (im Intervall $(0,2\pi)$) beschränkter Schwankung, und erfüllen ihre Fourierkoeffizienten die Beziehungen

$$a_n = \frac{a}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right), \quad b_n = \frac{b}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots), \tag{5}$$

so muß zunächst für $x = 0$ die Fourierreihe von $f(x)$, d. h. bei Weglassung des Anfangsgliedes, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergieren, woraus $a = 0$ folgt.

Da nun die periodische Funktion

$$\varphi(x) = b\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$$

bekanntlich für $0 < x < 2\pi$ gleich $b\frac{\pi - x}{2}$ ist, so ergibt sich weiter, daß die Funktion $f_1(x) = f(x) - \varphi(x)$ mit den Fourierkoeffizienten $a_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$, $b_n - \frac{b}{n} = o\left(\frac{1}{n}\right)$ unter die Voraussetzungen des im § 1 bewiesenen Satzes fällt, also überall von rechts und links denselben Grenzwert hat. Insbesondere ist daher

$$f_1(0+0) = f_1(2\pi - 0),$$

nd hieraus folgt wegen der vorausgesetzten Stetigkeit und Periodizität on $f(x)$, daß

$$b\frac{\pi}{2} = -b\frac{\pi}{2}, \text{ also } b = 0$$

t[4]). Es gibt also keine Funktion der in Frage stehenden Art.

Göttingen, den 25. Juli 1919.

---

[4]) Dies ergibt sich auch aus folgender Überlegung, die den Inhalt des § 1 *nicht* raussetzt: Da die Funktion $f(x)$ wegen der über sie gemachten Voraussetzungen ihre überall gleichmäßig konvergente Fourierreihe entwickelbar ist, resultiert für $(x) = \frac{f(x)-f(-x)}{2}$ die ebenfalls gleichmäßig konvergente Entwicklung $\sum_{\nu=1}^{\infty} b_\nu \sin \nu x$ lso insbesondere die Periodizität und Stetigkeit). Bei gegebenem $\delta > 0$ ist daher

$$\left| \sum_{\nu=1}^{n} b_\nu \sin \nu x - g(x) \right| < \delta \text{ für } n \geqq m(\delta) \text{ und alle } x,$$

rner wegen $g(0) = 0$

$$|g(x)| < \delta \text{ für } |x| < \varepsilon(\delta),$$

so schließlich

$$\left| \sum_{\nu=1}^{n} b_\nu \sin \nu x \right| < 2\delta \text{ für } n \geqq m(\delta) \text{ und } |x| < \varepsilon(\delta).$$

egen diese Tatsache ergibt nun die Annahme, daß in (5) $b \neq 0$ ist, einen Widerruch. Denn ohne Beschränkung der Allgemeinheit ist dann $b > 0$, also nach (5) r alle großen $\nu (\geqq k)$ das Produkt $\nu b_\nu \geqq \frac{b}{2}$, und daher für $n > k$ und $x = \frac{1}{n}$

$$\sum_{\nu=1}^{n} b_\nu \sin \nu x \geqq \sum_{\nu=1}^{k} b_\nu \sin \frac{\nu}{n} + \sum_{\nu=k+1}^{n} \frac{b}{2\nu} \frac{2}{\pi} \frac{\nu}{n} = o(1) + \frac{b}{\pi} \frac{n-k}{n} \to \frac{b}{\pi},$$

as bei $\delta = \frac{b}{4\pi}$ für alle großen n der Beziehung (6) widerspricht.

(Eingegangen am 28. Juli 1919).

Bemerkungen zur Theorie der abzählbaren Abelschen Gruppen.

Von

Werner Schmeidler in Göttingen.

Auf zwei Dinge soll in dieser kleinen Note aufmerksam gemacht werden:

Erstens, daß sich die Theorie der abzählbaren Abelschen Gruppen ebenso wie die der endlichen Abelschen Gruppen, wo es bekannt und geläufig ist[1]), mit gewissen *Moduln* von ganzzahligen Linearformen in Verbindung bringen läßt, die hier im allgemeinen unendlich viele Variablen enthalten (Satz I). Durch Betrachtungen, die im Falle endlich vieler Variablen zu einer endlichen Modulbasis führen, gelangt man jetzt zu einer im allgemeinen abzählbaren Modulbasis für einen beliebigen dieser Moduln, die besondere Eigenschaften besitzt (Satz II), und damit zu einer einfachen Darstellung der Gruppe (Satz III). Dieses letztere Resultat ist bereits bekannt, da es durch einfache Überlegungen aus den Sätzen 4, 8 und 26 der Habilitationsschrift des Herrn Levi *Abelsche Gruppen mit abzählbaren Elementen* zu gewinnen ist; es wird aber hier direkt, ohne die für die genannten Sätze benutzten Fallunterscheidungen und tieferen Begriffe hergeleitet.

Zweitens wird gezeigt, daß in dem Falle, wo für einen bestimmten der zur Gruppe gehörenden Moduln die Modulbasis eine endliche ist, die zugehörige Darstellung der Gruppe zu einer Darstellung durch eine *Basis im gewöhnlichen Sinne* verschärft werden kann, wobei nur abzählbar viele Basiselemente und unendliche Ordnung zugelassen werden müssen. Die Gruppe ist dann nämlich direktes Produkt von höchstens abzählbar vielen unzerlegbaren zyklischen Faktoren endlicher oder unendlicher Ordnung (Satz IV), und diese sind bei zwei verschiedenen Zerlegungen in gleicher Anzahl vorhanden und paarweise zueinander isomorph (Satz V).

[1]) Vgl. z. B. Steinitz, Zur Theorie der Moduln, Mathematische Annalen, Bd. 52 (1899), S. 1–57 und die dort zitierte Literatur.

§ 1.

Hilfssatz 1. *In jeder abzählbaren Abelschen Gruppe $\mathfrak{A}$ gibt es ein System von höchstens abzählbar vielen Elementen $B_1, B_2, \ldots$, so daß jedes Element A von $\mathfrak{A}$ in der Form $A = B_1^{\beta_1} B_2^{\beta_2} \ldots$ durch endlich viele Elemente $B_1, B_2, \ldots$ mit positiven oder negativen ganzzahligen Exponenten $\beta_1, \beta_2, \ldots$ darstellbar ist.*

Man nehme z. B. die sämtlichen Elemente A der Gruppe $\mathfrak{A}$ selbst.

Es sei nun $B_1, B_2, \ldots$ ein solches System von Elementen. Wir ordnen nun jedem Produkte $B_1^{\beta_1} B_2^{\beta_2} \ldots$ die „finite" Linearform $\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \ldots$ mit den ganzzahligen Koeffizienten $\beta_1, \beta_2, \ldots$ zu.

Hilfssatz 2. *Die Gesamtheit aller den Darstellungen der Haupteinheit $E = B_1^{\alpha_1} B_2^{\alpha_2} \ldots$ zugeordneten Linearformen $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots$ bildet einen „Modul" $\mathfrak{M}$ von Linearformen, d. h. ein solches System, bei dem die Differenz zweier Linearformen des Systems wieder zum System gehört.*

Dies folgt daraus, daß der Quotient zweier Darstellungen der Haupteinheit wieder eine solche ergibt. — In bekannter Weise zeigt man, daß mit je zwei Linearformen auch ihre Summe, und mit jeder Linearform auch ihr Produkt mit einer beliebigen ganzen Zahl zum Modul gehört.

Hilfssatz 3. *Die Gesamtheit aller den Darstellungen eines beliebigen Elements A der Gruppe zugeordneten Linearformen bildet eine „Restklasse" mod $\mathfrak{M}$, d. h. ein solches vollständiges System, bei dem die Differenz zweier Linearformen des Systems zum Modul $\mathfrak{M}$ gehört.*

Denn der Quotient zweier Darstellungen desselben Elements ist eine Darstellung von E, und das System ist vollständig, d. h. umfaßt alle Linearformen, die zu einer beliebigen aus dem System kongruent sind, weil das Produkt einer beliebigen Darstellung von A mit einer beliebigen Darstellung von E wieder eine Darstellung von A ergibt.

Hilfssatz 4. *Die Zuordnung der Elemente von $\mathfrak{A}$ zu den Restklassen mod $\mathfrak{M}$ ist umkehrbar eindeutig und isomorph in dem Sinne, daß dem Produkte zweier Elemente von $\mathfrak{A}$ die Summe der zugeordneten Restklassen mod $\mathfrak{M}$ entspricht.*

In der Tat lassen sich Restklassen mod $\mathfrak{M}$ addieren, wobei alle gewöhnlichen Verknüpfungsgesetze gelten, sie bilden daher eine höchstens abzählbare Abelsche Gruppe in bezug auf die Addition als Verknüpfungsoperation, die wir als „Gruppe der Restklassen mod $\mathfrak{M}$" oder kurz als „Restgruppe von $\mathfrak{M}$" bezeichnen. Da die Isomorphie mit der gegebenen Gruppe $\mathfrak{A}$ evident ist, so können wir zusammenfassend folgenden Satz aussprechen:

Satz I. *Jede abzählbare Abelsche Gruppe $\mathfrak{A}$ ist isomorph zu der Restgruppe eines Moduls $\mathfrak{M}$ von finiten Linearformen in höchstens abzählbar vielen Variablen.*

Jedem System von Elementen $B_1, B_2, \ldots$ des Hilfssatzes 1 entspricht ein Modul und damit eine Restgruppe. Alle verschiedenen so erhaltenen Moduln haben isomorphe Restgruppen.

Für Moduln aus finiten Linearformen gilt nun folgender

Satz II. *Jeder Modul $\mathfrak{M}(x_1, x_2, \ldots)$ von finiten Linearformen, der nicht nur aus der einen Form 0 besteht, besitzt eine höchstens abzählbare Modulbasis der Form*

$$(1)\qquad \begin{aligned} z_1 &= \alpha_{11}x_1 + \ldots + \alpha_{1l_1}x_{l_1} \quad (\alpha_{1l_1} > 0)\\ z_2 &= \alpha_{21}x_1 + \ldots + \alpha_{2l_2}x_{l_2} \quad (\alpha_{2l_2} > 0) \quad (0 < l_1 < l_2 < \ldots)\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

so daß also jede Linearform M aus $\mathfrak{M}$ in der Form

$$M = c_1 z_1 + c_2 z_2 + \ldots$$

durch endlich viele $z_1, z_2, \ldots$ ganzzahlig darstellbar ist. Hierbei gehören $z_1, z_2, \ldots$ selbst zu $\mathfrak{M}$.

Zum Beweise bezeichnen wir mit Herrn Toeplitz[2]) den höchsten Index, der in einer Linearform $L = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 \ldots$ mit einem von Null verschiedenen Koeffizienten vorkommt, als die Länge von L. l_1 sei die kleinste Länge einer Linearform von $\mathfrak{M}$; eine solche gibt es für $\mathfrak{M} \neq 0$. z_1 sei nun unter allen zu $\mathfrak{M}$ gehörenden Linearformen der Länge l_1 eine solche mit kleinstem positiven Koeffizienten von x_{l_1}. Dann ist jedes M von der Länge l_1 gleich $c_1 z_1$, wo c_1 eine ganze Zahl ist. Denn erstens sind alle Linearformen der Länge l_1 von $\mathfrak{M}$ zueinander proportional, weil eine lineare Verbindung von irgend zweien unter ihnen mit geeigneten ganzen Koeffizienten die Variable x_{l_1} nicht mehr enthält, also von einer Länge $< l_1$, also identisch Null ist. Zweitens ist der höchste Koeffizient α_{l_1} jedes solchen M durch α_{1l_1} teilbar, weil sonst $\alpha_{l_1} = q\alpha_{1l_1} + r$ $(0 < r < \alpha_{1l_1})$, also $M - qz_1$ von der Länge l_1 und von kleinerem positiven höchsten Koeffizienten wäre als z_1. Ferner sei l_2 die zweitkleinste Länge einer Linearform von $\mathfrak{M}$, und z_2 eine solche Linearform von $\mathfrak{M}$ von der Länge l_2, bei der die Variable x_{l_2} den kleinsten positiven Koeffizienten besitzt. Dann ist jedes M von der Länge l_2 gleich $c_1 z_1 + c_2 z_2$ mit ganzzahligen Koeffizienten c_1, c_2. Denn für zwei beliebige Linearformen aus $\mathfrak{M}$ von

[2]) Über die Auflösung unendlich vieler linearer Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten [Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, Bd. 28 (1909), S. 88–96].

r Länge l_2 gibt es eine ganzzahlige lineare Verbindung von kleinerer
ınge, die also die Länge l_1 hat oder identisch verschwindet, jedenfalls
so in der Form $c_1 z_1$ darstellbar ist. Zweitens ist wieder der höchste
oeffizient α_{l_2} jedes solchen M durch $\alpha_{2 l_2}$ teilbar, woraus die Darstellung
$- c_2 z_2 = c_1 z_1$ folgt. In ähnlicher Weise ist der Beweis für jede in $\mathfrak{M}$
rkommende Länge l_i und damit für jede Linearform von $\mathfrak{M}$ zu führen.

Aus diesem Satze wollen wir nun eine einfache Darstellung der Rest-
uppe und damit der gegebenen Gruppe $\mathfrak{A}$ ableiten. Wir bezeichnen
e Restklassen der Linearformen $x_1, x_2, \ldots$ mit $\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \ldots$ Dann ist
de Restklasse mod $\mathfrak{M}$ in der Form

)
$$\beta_1 \mathfrak{x}_1 + \beta_2 \mathfrak{x}_2 + \ldots$$

rstellbar, *und zwar eindeutig*, wenn wir die ganzzahligen Koeffizienten
$, \beta_2, \ldots$ den folgenden Bedingungen unterwerfen:

1. Die Koeffizienten β_{l_i} durchlaufen die Reihe $0, \ldots, \alpha_{i l_i} - 1$ oder
gendein anderes, aber festgewähltes vollständiges Restsystem mod $\alpha_{i l_i}$.

2. Die übrigen Koeffizienten durchlaufen alle positiven und negativen
nzen Zahlen.

Je eine der beiden Klassen kann dabei in speziellen Fällen auch
nz fehlen.

In der Tat erhält man hierbei zunächst jede Restklasse mod $\mathfrak{M}$.
enn irgendeine Linearform $b_1 x_1 + b_2 x_2 + \ldots$ hat entweder eine Länge
$< l_1$ und gehört alsdann zu einer Restklasse (2); oder es gibt eine
ößte Zahl $l_i < l$; dann kann man b_{l_i} durch Subtraktion eines geeigneten
nzzahligen Vielfachen von z_i in eine Zahl des festgewählten Restsystems
od $\alpha_{i l_i}$ verwandeln. Verfährt man ebenso mit allen kleineren Indizes
$- 1, \ldots, 1$, so findet man eine kongruente Linearform, deren Koeffizienten
n beiden Forderungen genügen. Ferner ist diese Darstellung eindeutig.
ären nämlich für dieselbe Restklasse zwei verschiedene Darstellungen
) vorhanden, wäre also

$$\beta_1 \mathfrak{x}_1 + \beta_2 \mathfrak{x}_2 + \ldots = \beta_1' \mathfrak{x}_1 + \beta_2' \mathfrak{x}_2 + \ldots,$$

wäre $(\beta_1 - \beta_1') x_1 + (\beta_2 - \beta_2') x_2 + \ldots$ eine Linearform aus $\mathfrak{M}$, also
n einer Länge l_i, da sie nicht identisch verschwinden kann. Es müßte
her $\beta_{l_i} - \beta_{l_i}' \neq 0$ und durch $\alpha_{i l_i}$ teilbar sein. Andererseits gehören aber
und β_{l_i}' beide demselben vollständigen Restsystem mod $\alpha_{i l_i}$ an; hierin
gt ein Widerspruch.

Wir wollen nun den hieraus folgenden Satz noch in einer Hinsicht
rschärfen. Wir betrachten nämlich alle Zahlen l_i, für die $\alpha_{i l_i} = 1$ ist.
e zugehörigen Elemente B_{l_i} haben dann die Eigenschaft, daß sie durch
vorangehenden B_i darstellbar sind; umgekehrt ist jedes durch die

vorangehenden Elemente darstellbare B ein B_{l_i}, wobei der zugehörige Koeffizient $\alpha_{il_i} = 1$ ist. Streichen wir aus der Reihe $B_1, B_2, \ldots$ alle diese Elemente fort, so bleibt ein System von Elementen übrig, das wiederum die Eigenschaft des Hilfssatzes 1 hat, weil jedes A durch endlich viele von allen B, also auch durch endlich viele von den übrigbleibenden darstellbar ist. Für das so reduzierte System ist alsdann der zugehörige Modul entweder $= 0$, oder in der Modulbasis (1) sind alle $\alpha_{il_i} > 1$. Damit ist folgender Satz bewiesen:

Satz III. *In jeder abzählbaren Gruppe $\mathfrak{A}$ gibt es ein System von höchstens abzählbar vielen Elementen $B_1, B_2, \ldots$, derart, daß jedes Element A von $\mathfrak{A}$ in der Form $B_1^{\beta_1} B_2^{\beta_2} \ldots$ mit endlich vielen positiven oder negativen Exponenten eindeutig dargestellt werden kann, wenn über die Exponenten folgendes festgesetzt wird: Die Exponenten β_{l_i} durchlaufen die Zahlen eines beliebigen, aber festgewählten vollständigen Restsystems mod α_{il_i}, die übrigen Exponenten durchlaufen alle positiven und negativen ganzen Zahlen. Hierbei bedeuten die Zahlen l_i eine endliche oder unendliche Reihe von wachsenden, positiven ganzen Zahlen, die Zahlen α_{il_i} sind ganz und > 1. In speziellen Fällen kann die eine oder die andere der beiden Klassen von Exponenten ganz fehlen.*

§ 2.

Wir wollen nun speziell den Fall behandeln, daß für einen zu $\mathfrak{A}$ gehörigen Modul $\mathfrak{M}$ die Zahlen $l_1, l_2, \ldots$ nur eine endliche Reihe bilden, d. h. *daß eine endliche Modulbasis* (1) *existiert.* Wir beweisen hierzu vorher einen Hilfssatz:

Hilfssatz 5. *Übt man in den Linearformen eines Moduls $\mathfrak{M}(x_1, x_2, \ldots)$ auf die Variablen $x_1, x_2, \ldots$ eine ganzzahlig umkehrbare zeilenfinite ganzzahlige Transformation*

$$\begin{aligned} x_1 &= a_{11} y_1 + a_{12} y_2 + \ldots \\ x_2 &= a_{21} y_1 + a_{22} y_2 + \ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \tag{3}$$

aus, so erhält man einen Modul $\mathfrak{N}(y_1, y_2, \ldots)$, dessen Restgruppe $\mathfrak{H}$ zu der Restgruppe $\mathfrak{G}$ von $\mathfrak{M}$ isomorph ist. Insbesondere geht dabei eine Modulbasis von $\mathfrak{M}$ in eine Modulbasis von $\mathfrak{N}$ über.

Es genügt zum Beweise, die Restklassen $\mathfrak{x}_i$ mod $\mathfrak{M}$ und $a_{i1}\mathfrak{y}_1 + a_{i2}\mathfrak{y}_2 + \ldots$ mod $\mathfrak{N}$ einander zuzuordnen, und allen Verbindungen von $\mathfrak{x}_i$ die entsprechenden Verbindungen dieser Linearformen der $\mathfrak{y}_i$, wobei $\mathfrak{y}_i$ die Restklasse von y_i mod $\mathfrak{N}$ bedeutet. Dadurch ist jeder Restklasse von $\mathfrak{G}$ eine solche von $\mathfrak{H}$ zugeordnet und umgekehrt; diese Zuordnung ist

eindeutig, weil der Restklasse 0 in $\mathfrak{G}$ nur die Restklasse 0 in $\mathfrak{H}$ entricht und umgekehrt; in der Tat erhält man aus $\mathfrak{N}$ den Modul $\mathfrak{M}$ zuck, indem man in seinen Linearformen die zu (3) reziproke Transrmation ausführt. Ferner ist die Zuordnung isomorph.

Es sei also jetzt für den zur Gruppe $\mathfrak{A}$ gehörenden Modul $\mathfrak{M}$ die odulbasis (1) eine endliche und bestehe aus den Linearformen $z_1, \ldots, z_m$. ese sind linear unabhängig, und es ist $m \leqq l_m = n$. Bildet man nun m eare ganzzahlige Verbindungen von $z_1, \ldots, z_m$, wobei die Determinante r Koeffizienten ± 1 ist, so erhält man wiederum eine m gliedrige Modulsis von $\mathfrak{M}$. Die Matrix der Koeffizienten von $z_1, \ldots, z_m$ multipliziert h dabei vorn mit der Transformationsmatrix. Führen wir andererseits r $x_1, \ldots, x_n$ neue Variable $y_1, \ldots, y_n$ vermöge einer unimodularen Transrmation ein, die wir durch die Gleichungen $x_{n+1} = y_{n+1}, \ldots$ ergänzt nken können, so erhalten wir nach Hilfssatz 5 die Modulbasis eines oduls $\mathfrak{N}(y_1, y_2, \ldots)$ mit einer zu $\mathfrak{A}$ isomorphen Restgruppe. Hierbei mulziert sich die Matrix der Koeffizienten von $z_1, \ldots, z_m$ hinten mit der reihigen Transformationsmatrix. Nun kann man aber bekanntlich durch rdere Multiplikation mit einer m-reihigen und durch hintere Multiplition mit einer n-reihigen quadratischen unimodularen Matrix jede ganzhlige Matrix von m Zeilen und n Spalten auf eine ganzzahlige Diagonalatrix transformieren; es gibt daher einen Modul $\mathfrak{N}$, dessen Restgruppe $\mathfrak{A}$ isomorph ist und der eine Modulbasis der Form

$$\begin{aligned} t_1 &= \beta_{11} y_1 \\ t_2 &= \quad \beta_{22} y_2 \\ &\cdots\cdots\cdots \\ t_m &= \qquad \beta_{mm} y_m \end{aligned}$$

sitzt.

Aus dieser Gestalt der Modulbasis ergibt sich nun aber sofort, daß e Restgruppe von $\mathfrak{N}$ direktes Produkt von m zyklischen Faktoren endher Ordnung, die ihrerseits wieder in bekannter Weise in endlich viele zerlegbare Faktoren zerlegt werden können, mit höchstens abzählbar endlich vielen unendlichen zyklischen Faktoren, nämlich den durch die stklassen $\mathfrak{y}_{m+1}, \ldots$ erzeugten zyklischen Gruppen, ist. Aus der Isomorphie $\mathfrak{A}$ ergibt sich daher der

Satz IV. *Besitzt einer der zur Gruppe $\mathfrak{A}$ gemäß Satz* I *gehörenden oduln eine endliche Modulbasis, so ist die Gruppe $\mathfrak{A}$ direktes Produkt n endlich vielen unzerlegbaren zyklischen Faktoren endlicher Ordnung t höchstens abzählbar vielen unendlichen zyklischen Faktoren. Umkehrt gehört zu jeder derartigen Gruppe ein Modul mit endlicher odulbasis.*

Der letzte Teil des Satzes ist klar, wie man sofort einsieht, indem man aus jedem zyklischen Faktor ein erzeugendes Element auswählt und den zugehörigen Modul bildet.

Wir fragen nun nach der *Eindeutigkeit* dieser Darstellung der Gruppe. Zunächst ist das Produkt aller endlichen zyklischen Faktoren für zwei solche Zerlegungen dasselbe, da es in jedem Falle die Gesamtheit aller Elemente endlicher Ordnung umfaßt. Daraus folgt nach dem bekannten Satze über endliche Abelsche Gruppen, daß die Anzahl der endlichen unzerlegbaren Faktoren in beiden Zerlegungen übereinstimmt und diese selbst paarweise isomorph sind. Ferner ist natürlich jeder unendliche zyklische Faktor zu jedem anderen isomorph. Aber auch die Anzahl dieser Faktoren stimmt in beiden Zerlegungen überein.

Um dies zu zeigen, sei diese Anzahl vorerst in einer Zerlegung endlich und gleich k; $A_1, \ldots, A_k$ seien erzeugende Elemente der k Faktoren. Dann kann in keiner zweiten Zerlegung die ensprechende Anzahl $l < k$ sein. Sind nämlich $B_1, \ldots, B_l$ die erzeugenden Elemente für die zweite Zerlegung, so ist einmal

$$B_i = A_1^{\alpha_{i1}} \ldots A_k^{\alpha_{ik}} C_i \qquad (i = 1, \ldots, l),$$

wo C_i ein Element endlicher Ordnung ist, zweitens

$$A_j = B_1^{\beta_{j1}} \ldots B_l^{\beta_{jl}} C_j' \qquad (j = 1, \ldots, k),$$

also

$$A_j = A_1^{\beta_{j1}\alpha_{11} + \cdots + \beta_{jl}\alpha_{l1}} \ldots A_k^{\beta_{j1}\alpha_{1k} + \cdots + \beta_{jl}\alpha_{lk}} C_j'',$$

daher $C_j'' = E$ und $\sum_{\lambda=1}^{l} \beta_{j\lambda}\alpha_{\lambda\varkappa} = \delta_{j\varkappa}^{1}$ $(j, \varkappa = 1, \ldots, k)$. Dies ist aber unmöglich für $l < k$.

Noch einfacher zeigt man, daß, falls die Anzahl bei einer Zerlegung unendlich ist, sie bei keiner andern endlich sein kann. Die erzeugenden Elemente der zweiten Zerlegung würden schon durch endlich viele erzeugende Elemente der ersten Zerlegung darstellbar sein, also wäre auch jedes erzeugende Element der ersten Zerlegung durch jene endlich vielen darstellbar, worin ein Widerspruch liegt.

Hieraus folgt nun aber, daß entweder in beiden Zerlegungen die Anzahl unendlich, oder daß sie beide Male endlich ist. Dann zeigt aber unsere erste Überlegung, daß beide Anzahlen einander gleich sind.

Satz V. *Bei zwei verschiedenen Zerlegungen einer den Bedingungen von Satz* IV *genügenden Gruppe* $\mathfrak{A}$ *in unzerlegbare zyklische Faktoren stimmt die Anzahl der Faktoren überein und diese selbst sind paarweise isomorph.*

Göttingen, den 10. August 1919.

(Eingegangen am 14. September 1919.)

eometrische Untersuchungen zur Variationsrechnung. I. Über Symmetralen.

Von

Wilhelm Blaschke in Hamburg.

Herr P. Funk hat mich kürzlich gesprächsweise auf die Aufgabe hinwiesen, alle Variationsprobleme zu ermitteln, auf die sich der Begriff r „Streckensymmetralen" aus der Elementargeometrie in geeigneter Weise ertragen lasse.

Es sei

$$s = \int_{t_0}^{t_1} F(x_1, x_2; x_1', x_2')\, dt$$

s „Grundintegral" eines gewöhnlichen ebenen Variationsproblems in der rameterform von Weierstraß. Als *„Entfernung"* zweier Punkte $x_1, x_2)$ und $\mathfrak{y}(y_1, y_2)$ unserer Ebene sei das längs der die Punkte $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}$ mitander verbindenden Extremalen erstreckte Grundintegral $s(x_1, x_2; y_1, y_2)$ rstanden. Der Ort aller Punkte $\mathfrak{y}$, die von zwei festen Punkten $\mathfrak{x}, \mathfrak{x}^*$ iche „Entfernung" haben

$$s(x_1, x_2; y_1, y_2) = s(y_1, y_2; x_1^*, x_2^*),$$

als *„Symmetrale"* des Punktepaares $\mathfrak{x}, \mathfrak{x}^*$ bezeichnet. Diese Symmelen werden im allgemeinen eine Kurvenschar bilden, die von vier sentlichen Parametern $x_1, x_2; x_1^*, x_2^*$ abhängt. Wir wollen uns nun die fgabe stellen: *Alle Variationsprobleme zu ermitteln, die mit der ementargeometrie die Eigenschaft teilen, daß die Symmetralen nur von ei Parametern abhängen.*

Es soll gezeigt werden: Bei geeigneten Voraussetzungen über die nktion F unter dem Grundintegral (1) haben nur die Probleme von Form

$$s = \int \sqrt{\sum g_{ik} x_i' x_k'} \cdot dt,$$

worin die $g_{ik}(x_1, x_2)$ die Koeffizienten einer quadratischen Differentialform mit konstantem Gaußschen Krümmungsmaß sind, die gewünschte Eigenschaft. Mit anderen Worten: *Durch unsere Forderung sind die nicht-Euklidischen und Euklidischen Maßbestimmungen gekennzeichnet.*

Etwas enger könnte man unsere Aufgabe auch so fassen: Alle Variationsprobleme zu ermitteln, deren Symmetralen gleichzeitig Extremalen sind.

Es sei erwähnt, daß sich die ganze folgende Betrachtung ohne neue Schwierigkeiten auch auf Räume von beliebiger Dimensionenzahl $n \geqq 2$ ausdehnen läßt, also auf Variationsprobleme von der Form

$$s = \int F(x_1, x_2, \ldots, x_n; x_1', x_2', \ldots, x_n')\, dt. \tag{4}$$

Als Lösungen ergeben sich wieder nur die Räume Riemanns, deren „Bogenelement"

$$ds^2 = \sum_1^n g_{ik}\, dx_i\, dx_k \tag{5}$$

skalares und konstantes Krümmungsmaß besitzt.

Zum Beweise wollen wir etwa (enger als nötig wäre) die Annahmen vorausschicken, die Funktion F im Grundintegral (1) sei analytisch und das Variationsproblem sei „*regulär*". Diese „Regularität" sei folgendermaßen mittels der „*Eichkurven*" des Variationsproblems erklärt. Nimmt man den Punkt $\mathfrak{x}(x_1, x_2)$ zum Ursprung eines neuen Achsenkreuzes und trägt von ihm aus den Vektor $\mathfrak{x}'(x_1', x_2')$ ab, so wird durch die Bedingung für $\mathfrak{x}'$

$$F(x_1, x_2; x_1', x_2') = 1 \tag{6}$$

bei festen x_1, x_2 die „Eichkurve" oder „Indikatrix" des Punktes $\mathfrak{x}$ bestimmt. Diese Eichkurve $\mathfrak{E}(\mathfrak{x})$ soll nun für jeden Punkt $\mathfrak{x}$ eine Eilinie (= geschlossene konvexe Kurve) sein, die $\mathfrak{x}$ umschlingt; dann nennt man das Problem „regulär"[1]).

Für die Eichkurven ist es leicht eine *geometrische Deutung* anzugeben. Beschreibt man um den Punkt $\mathfrak{x}$ den „Kreis" vom Radius r, der aus allen Punkten $\mathfrak{y}$ besteht, die von $\mathfrak{x}$ die „Entfernung" r haben,

$$s(x_1, x_2; y_1, y_2) = r, \tag{7}$$

vergrößert man dann diesen Kreis von $\mathfrak{x}$ aus ähnlich im Verhältnis $1 : r$, so geht beim Grenzübergang $r \to 0$ der Kreis in die Eichkurve des Punktes $\mathfrak{x}$ über.

---

[1]) Vgl. hier und im folgenden das Lehrbuch von O. Bolza, Vorlesungen über Variationsrechnung, Leipzig und Berlin 1909. Die Eichkurve ist dort auf S. 247, 248 erklärt, die Regularität auf S. 214.

Wenn wir F als analytisch annehmen, so ist auch die „Entfernung“ $x_1, x_2; y_1, y_2)$ eine analytische Funktion ihrer vier Veränderlichen und her sind nach (2) die Symmetralen ebenfalls analytische Kurven, die n den Parametern $x_1, x_2; x_1^*, x_2^*$ analytisch abhängen.

Hängt die Kurvenschar der Symmetralen nur von zwei Parametern , so geht durch ein geeignet gewähltes Linienelement keine stetige Teilhar dieser Kurven hindurch. Wir konstruieren nun ne der beiden Extremalen, die ein solches Linienelement (sein Punkt heiße $\mathfrak{m}$) „transversal“ durchsetzen. ittels der Eichkurve $\mathfrak{E}(\mathfrak{m})$ geht das so (Fig. 1): Man gt an $\mathfrak{E}(\mathfrak{m})$ eine der beiden Tangenten, deren Richng mit der Geraden unseres Linienelementes übereinimmt. Ihr Berührungspunkt mit $\mathfrak{E}(\mathfrak{m})$ sei $\mathfrak{p}$. Dann ist e Extremale durch $\mathfrak{m}$ mit der Tangentenrichtung $\mathfrak{m} \to \mathfrak{p}$ ne der beiden unser Linienelement transversal durchtzenden Extremalen. Auf ihr nehmen wir in gleicher, genügend einer „Entfernung“ von $\mathfrak{m}$:

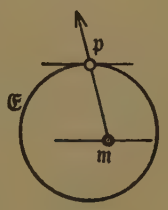


Fig. 1.

$$s(\mathfrak{x}, \mathfrak{m}) = s(\mathfrak{m}, \mathfrak{x}^*),$$

wei Punkte $\mathfrak{x}, \mathfrak{x}^*$ an. Die Symmetrale $\mathfrak{S}$ von $\mathfrak{x}, \mathfrak{x}^*$ enthält dann das Linienement mit dem Punkte $\mathfrak{m}$, von dem wir ausgegangen sind. Läßt man n $\mathfrak{x}, \mathfrak{x}^*$ unter Erhaltung von (8) auf der sie verbindenden Extremalen ndern, so muß nach unseren Annahmen über das Linienelement die mmetrale $\mathfrak{S}$ des Paares $\mathfrak{x}, \mathfrak{x}^*$ fest bleiben.

Es sei $\mathfrak{m}'$ ein Nachbarpunkt von $\mathfrak{m}$ auf der Symmetralen $\mathfrak{S}$. Dann t nach Voraussetzung

$$s(\mathfrak{x}, \mathfrak{m}') = s(\mathfrak{m}' \mathfrak{x}^*).$$

araus ergibt sich ein Zusammenhang zwischen den Richtungen der Exemalen $[\mathfrak{x}\,\mathfrak{m}']$ und $[\mathfrak{m}'\mathfrak{x}^*]$ in $\mathfrak{m}'$. Ist nämlich $\mathfrak{m}''$ ein auf $\mathfrak{S}$ einseitig n $\mathfrak{m}'$ beweglicher Nachbarpunkt von $\mathfrak{m}'$, so nn man die Ableitung

$$\frac{d\,s(\mathfrak{x}, \mathfrak{m}'')}{d\,s(\mathfrak{m}', \mathfrak{m}'')} = \lim_{\mathfrak{m}'' \to \mathfrak{m}'} \frac{s(\mathfrak{x}, \mathfrak{m}'') - s(\mathfrak{x}, \mathfrak{m}')}{s(\mathfrak{m}', \mathfrak{m}'')},$$

der Eichkurve $\mathfrak{E}(\mathfrak{m}')$ so konstruieren. Die richtete Tangente (Fig. 2) an die Extremale $\mathfrak{m}']$ in $\mathfrak{m}'$ durchschneide die Eichkurve $\mathfrak{E}(\mathfrak{m}')$ $\mathfrak{p}$, die gerichtete Tangente in $\mathfrak{m}'$ an die von ' nach $\mathfrak{m}''$ gerichtete Symmetrale $\mathfrak{S}$ schneide $(\mathfrak{m}')$ in $\mathfrak{s}$. Ferner sei $\mathfrak{q}$ der Schnittpunkt r Tangente in $\mathfrak{p}$ an $\mathfrak{E}(\mathfrak{m}')$ mit der Geraden

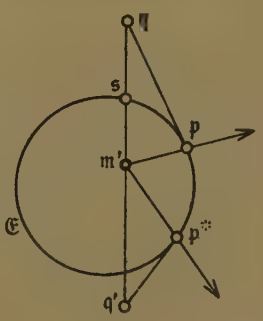


Fig. 2.

$\mathfrak{m}'\mathfrak{s}$. Dann ist der gesuchte Grenzwert gleich dem Verhältnis der Strecken $\mathfrak{m}'\mathfrak{s} : \mathfrak{m}'\mathfrak{q}$

$$\lim \frac{s(\mathfrak{x}, \mathfrak{m}'') - s(\mathfrak{x}, \mathfrak{m}')}{s(\mathfrak{m}', \mathfrak{m}'')} = \frac{\mathfrak{m}'\mathfrak{s}}{\mathfrak{m}'\mathfrak{q}} \quad (9)$$

[2]).

Da aber nach Voraussetzung

$$\frac{s(\mathfrak{x}, \mathfrak{m}'') - s(\mathfrak{x}, \mathfrak{m}')}{s(\mathfrak{m}', \mathfrak{m}'')} = \frac{s(\mathfrak{m}''; \mathfrak{x}^*) - s(\mathfrak{m}', \mathfrak{x}^*)}{s(\mathfrak{m}', \mathfrak{m}'')}$$

ist, ergibt sich hieraus folgende Konstruktion für die Richtung $\mathfrak{m}' \to \mathfrak{p}^*$ der Extremalen $[\mathfrak{m}'\mathfrak{x}^*]$ in $\mathfrak{m}'$. Es sei $\mathfrak{q}'$ der zu $\mathfrak{q}$ bezüglich $\mathfrak{m}'$ symmetrische Punkt, so daß $\mathfrak{m}'$ der Halbierungspunkt der geradlinigen Strecke $\mathfrak{q}\mathfrak{q}'$ ist. Dann ist $\mathfrak{p}^*$ der Punkt von $\mathfrak{E}(\mathfrak{m}')$, dessen Tangente durch $\mathfrak{q}'$ geht, und der mit $\mathfrak{p}$ auf derselben Seite von $\mathfrak{q}\mathfrak{q}'$ liegt.

Die Punkte $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{x}^*$ können wir kurz als „Spiegelpunkte" bezüglich der Symmetralen $\mathfrak{S}$ bezeichnen. Lassen wir nun $\mathfrak{x}$ auf der Extremalen $[\mathfrak{x}\mathfrak{m}']$ nach $\mathfrak{y}$ wandern, so, behaupten wir, wandert der Spiegelpunkt $\mathfrak{y}^*$ von $\mathfrak{y}$ an $\mathfrak{S}$ auf der Extremalen $[\mathfrak{m}'\mathfrak{x}^*]$. In der Tat, wandert $\mathfrak{y}$ auf $[\mathfrak{x}\mathfrak{m}']$, so bleibt von der Extremalen $[\mathfrak{m}'\mathfrak{y}^*]$ der Punkt $\mathfrak{m}'$ und die Richtung durch $\mathfrak{m}'$ und somit die ganze Kurve fest! Da somit $\mathfrak{S}$ auch Symmetrale des Punktepaares $\mathfrak{y}, \mathfrak{y}^*$ ist, ist nicht nur $s(\mathfrak{x}, \mathfrak{m}') = s(\mathfrak{m}', \mathfrak{x}^*)$, sondern auch $s(\mathfrak{y}, \mathfrak{m}') = s(\mathfrak{m}', \mathfrak{y}^*)$ und somit $s(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) = s(\mathfrak{y}^*, \mathfrak{x}^*)$. Die „Spiegelung" $\mathfrak{x} \leftrightarrow \mathfrak{x}^*$ an $\mathfrak{S}$ führt also Extremalen wieder in Extremalen über und erhält in gewissem Sinn die „Entfernungen".

Stellen wir die Spiegelung an $\mathfrak{S}$ durch Formeln dar

$$\begin{aligned} x_1^* &= x_1^*(x_1, x_2), \\ x_2^* &= x_2^*(x_1, x_2), \end{aligned} \quad (10)$$

so geben die linearen Substitutionen der Ableitungen

$$\begin{aligned} -x_1^{*\prime} &= \frac{\partial x_1^*}{\partial x_1} x_1' + \frac{\partial x_1^*}{\partial x_2} x_2', \\ -x_2^{*\prime} &= \frac{\partial x_2^*}{\partial x_1} x_1' + \frac{\partial x_2^*}{\partial x_2} x_2'. \end{aligned} \quad (11)$$

die mit jedem Stellenpaar verbundenen affinen Transformationen, die die beiden Eichkurven $\mathfrak{E}(\mathfrak{x})$ und $\mathfrak{E}(\mathfrak{x}^*)$ ineinander überführen. Um das einzusehen, braucht man nur zu beachten, daß die Eichkurve $\mathfrak{E}(\mathfrak{x})$ durch Grenzübergang aus dem „Kreise" $s(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) = r$ und die Eichkurve in ähnlicher Art durch Grenzübergang aus dem „Kreise" $s(\mathfrak{y}^*, \mathfrak{x}^*) = r$ entsteht

[2]) Es ist das eine geometrische Deutung für die bekannte Formel für die Variation des längs einer Extremalen erstreckten Integrals

$$\delta s = F_{x'}\, \delta x + F_{y'}\, \delta y,$$

vgl. bei Bolza die auf S. 247 angegebene Konstruktion Carathéodorys.

nd daß nach dem eben bewiesenen die beiden Kreise durch die Spiegelung
n $\mathfrak{S}$ ineinander übergeführt werden.

Wendet man diese Betrachtung insbesondere auf die Eichkurven $\mathfrak{E}(\mathfrak{m})$
er Punkte $\mathfrak{m}$ der Symmetralen $\mathfrak{S}$ an, so sieht man: Es gibt eine affine
piegelung (Fig. 3), die die Eichkurve $\mathfrak{E}(\mathfrak{m})$ und ihren Aufpunkt $\mathfrak{m}$ in
ch überführt, und zwar sind die Verbindungs-
nien entsprechender Punkte $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{p}^*$ von $\mathfrak{E}(\mathfrak{m})$
arallel zur Tangente in $\mathfrak{m}$ an $\mathfrak{S}$. Hält man
un $\mathfrak{m}$ fest und ändert man stetig die Richtung
er Extremalen $[\mathfrak{x}\,\mathfrak{x}^*]$ durch $\mathfrak{m}$ (Fig. 1) und ent-
prechend die dazu transversale Richtung der zu-
ehörigen Symmetralen $\mathfrak{S}$, so erkennt man, daß
ie analytische Eilinie $\mathfrak{E}(\mathfrak{m})$ durch eine stetige
char affiner Spiegelungen in sich selbst über-
eführt wird, also eine Ellipse mit dem Mittel-

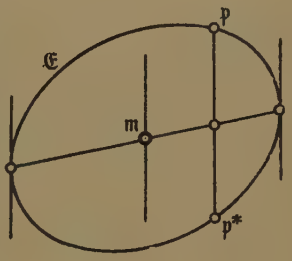


Fig. 3.

unkt $\mathfrak{m}$ sein muß. Da $\mathfrak{m}$ ein Punkt allgemeiner Lage war, so sind die
ichkurven unseres Variationsproblems Ellipsen, d. h. das Grundintegral
at sicher die Form

3) $$s = \int \sqrt{\sum g_{ik} x_i' x_k'}\, dt.$$

Da aber die Spiegelung $\mathfrak{x} \leftrightarrow \mathfrak{x}^*$ an einer Symmetralen die Ent-
rnungen s erhält, so ist nach Gauß in entsprechenden Punkten $\mathfrak{x}, \mathfrak{x}^*$
as Krümmungsmaß der quadratischen Differentialform

5) $$ds^2 = \sum g_{ik}\, dx_i\, dx_k$$

asselbe. Hält man $\mathfrak{x}^*$ fest und läßt $\mathfrak{x}$ wandern, so erkennt man schließ-
ch, daß das Krümmungsmaß konstant sein muß. Da bei konstantem
rümmungsmaß unsere Forderung, die Symmetralen sollen nur von zwei
arametern abhängen, erfüllt ist, so ist damit der Beweis zu Ende geführt.

Die ganze vorgetragene Überlegung bedarf einer kleinen Abänderung,
enn man die Symmetralen anders einführt. Haben die Eichkurven $\mathfrak{E}(\mathfrak{x})$
icht alle ihre Aufpunkte $\mathfrak{x}$ zum Mittelpunkt, so ist die Entfernung $s(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$
unsymmetrischer Weise von $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}$ abhängig. Dann ändert sich auch die
rklärung der Symmetralen, wenn man an Stelle von (2) als Definition

2*) $$s(x_1, x_2; y_1, y_2) = s(x_1^*, x_2^*; y_1, y_2)$$

immt. Die Transversalitätsbeziehungen längs der Symmetralen nehmen
ann eine andere etwas symmetrischere Form an und die Eigenschaft der
piegelung an einer Symmetralen, die Entfernungen zu erhalten, bekommt
e Gestalt $s(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) = s(\mathfrak{x}^*, \mathfrak{y}^*)$.

Balingen in Württemberg, am 13. Sept. 1919.

(Eingegangen am 16. September 1919.)

Beitrag zur Theorie der divergenten Reihen[1]).

Von

Oskar Perron in Heidelberg.

§ 1.

Summatorische Folgen.

Die verschiedenen Summationsmethoden für divergente Reihen lassen sich auf ein gemeinsames Prinzip zurückführen, wobei der folgende Satz eine entscheidende Rolle spielt.

Satz 1. *Sei* $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots$ *eine Folge von Funktionen der reellen Veränderlichen* x, *und sei*

$$\text{(A)} \qquad \lim_{x=\infty} \varphi_\nu(x) = 1 \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots),$$

$$\text{(B)} \qquad \sum_{\nu=0}^{\infty} |\varphi_\nu(x) - \varphi_{\nu+1}(x)| \leqq M,$$

wo M *von* x *nicht abhängt. Wenn nun*

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$$

eine konvergente Reihe ist und den Wert s *hat, so konvergiert auch die Reihe*

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \varphi_\nu(x) = \Phi(x),$$

und es ist

$$\lim_{x=\infty} \Phi(x) = s.$$

Dabei spielt es keine Rolle, ob man den Grenzprozeß $x \to \infty$ *in stetiger Weise oder mit Beschränkung auf eine gewisse Auswahl von* x*-Werten, etwa ganzzahlige* x, *ausführt. In letzterem Fall brauchen die Funktionen* $\varphi_\nu(x)$ *auch nur für diese Auswahl definiert zu sein.*

---

[1]) Vgl. meine Note „Zur Theorie der divergenten Reihen", Math. Zeitschrift 6 (1920), S. 158–160 und die Berichtigung hierzu auf S. 302–303 dieser Abhandlung

Man beweist den Satz leicht durch Abelsche partielle Summation. tzt man nämlich

$$\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu = s_n,$$

ist identisch

$$\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu \varphi_\nu(x) = s\varphi_0(x) + \sum_{\nu=0}^{n-1} (s_\nu - s)[\varphi_\nu(x) - \varphi_{\nu+1}(x)] + (s_n - s)\varphi_n(x).$$

achtet man nun, daß wegen der Voraussetzung (B) der Grenzwert

$$\lim_{n=\infty} \varphi_n(x) = \varphi_0(x) + \sum_{\nu=0}^{\infty} [\varphi_{\nu+1}(x) - \varphi_\nu(x)]$$

istiert, und daß $\lim_{n=\infty} s_n = s$ ist, so folgt aus der vorigen Gleichung, indem an zur Grenze $n = \infty$ übergeht:

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \varphi_\nu(x) = s\varphi_0(x) + \sum_{\nu=0}^{\infty} (s_\nu - s)[\varphi_\nu(x) - \varphi_{\nu+1}(x)];$$

nn die rechts stehende Reihe ist ja absolut konvergent. In (2) steht n links die oben mit $\Phi(x)$ bezeichnete Funktion. Da außerdem $|s_\nu - s|$ r genügend große ν beliebig klein wird, etwa

$$|s_\nu - s| < \frac{\varepsilon}{2M} \quad \text{für} \quad \nu \geqq p,$$

ist

$$\left| \sum_{\nu=p}^{\infty} (s_\nu - s)[\varphi_\nu(x) - \varphi_{\nu+1}(x)] \right| \leqq \frac{\varepsilon}{2M} \sum_{\nu=p}^{\infty} |\varphi_\nu(x) - \varphi_{\nu+1}(x)| \leqq \frac{\varepsilon}{2},$$

d aus (2) folgt dann, indem man beiderseits noch s subtrahiert:

$$|\Phi(x) - s| = \left| s[\varphi_0(x) - 1] + \sum_{\nu=0}^{\infty} (s_\nu - s)[\varphi_\nu(x) - \varphi_{\nu+1}(x)] \right|$$

$$\leqq |s| \cdot |\varphi_0(x) - 1| + \sum_{\nu=0}^{p-1} |s_\nu - s| \cdot |\varphi_\nu(x) - \varphi_{\nu+1}(x)| + \frac{\varepsilon}{2}.$$

dies für alle x gilt, so folgt weiter mit Rücksicht auf die Voraus- zung (A) für genügend große x:

$$|\Phi(x) - s| < \varepsilon,$$

mit Satz 1 bewiesen ist.

Eine Funktionenfolge $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \ldots$, die den Bedingungen von tz 1 genügt, nennen wir eine *Folge summatorischer Funktionen* oder rzer eine *summatorische Folge*.

Sei nun

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \tag{3}$$

eine beliebige Reihe, konvergent oder divergent. Wenn dann die Reihe

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \varphi_\nu(x) = \Phi(x) \tag{4}$$

konvergiert, und wenn der Grenzwert

$$\lim_{x=\infty} \Phi(x) = \sigma \tag{5}$$

existiert[2]), so nennen wir die Reihe (3) *mit Hilfe der summatorischen Folge* $\varphi_\nu(x)$ *summierbar, und erteilen ihr den Wert* σ:

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu = \sigma.$$

Wenn die Reihe (3) selbst konvergiert und im gewöhnlichen Sinne den Wert s hat, so ist nach Satz 1 auch der Grenzwert σ vorhanden, und es ist $\sigma = s$. Unsere Definition der Reihensumme erfüllt also die von Herrn Hardy als Konsistenzbedingung bezeichnete Forderung, daß nämlich die Definition im Fall der Konvergenz nicht zu einem der gewöhnlichen Definition widersprechenden Resultat führen darf.

Aus unserer Definition folgen sofort ein paar elementare Rechenregeln:

Satz 2. *Sind die Reihen*

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu, \quad \sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu$$

mit Hilfe der summatorischen Folge $\varphi_\nu(x)$ *summierbar, so gilt dasselbe von den Reihen*

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} (a_\nu \pm b_\nu), \quad \sum_{\nu=0}^{\infty} c\, a_\nu,$$

und zwar ist

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} (a_\nu \pm b_\nu) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \pm \sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu,$$

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} c\, a_\nu = c \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu.$$

Der Beweis ist trivial.

---

[2]) Die uneigentlichen Grenzwerte $\pm\infty$ schließen wir aus.

§ 2.

Fallende summatorische Folgen. — Beispiele.

Die Bedingung (B) von Satz 1 ist insbesondere dann erfüllt, wenn

*) $$0 \leqq \varphi_{\nu+1}(x) \leqq \varphi_\nu(x) \leqq 1 \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots)$$

Eine solche summatorische Folge nennen wir *fallend*.

Wir wollen jetzt einige Beispiele von fallenden summatorischen Folgen geben, wobei sich insbesondere zeigen wird, daß die bisher in der Literatur rkommenden Summationsmethoden fast alle in unserer allgemeinen De-ition enthalten sind[3]).

Beispiel 1. Arithmetische Mittel.

Sei x positiv ganzzahlig, und

$$\varphi_\nu(x) = \begin{cases} \frac{x-\nu}{x} & \text{für} \quad \nu \leqq x \\ 0 & \text{für} \quad \nu > x. \end{cases}$$

e Bedingungen (A) und (B*) sind offenbar erfüllt; es ist

$$\Phi(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \frac{x-\nu}{x} = \frac{s_0 + s_1 + \ldots + s_{x-1}}{x},$$

mit $s_0, s_1, \ldots$ die Partialsummen (vgl. (1)) bezeichnet sind. Daher

$$\sigma = \lim_{x=\infty} \frac{s_0 + s_1 + \ldots + s_{x-1}}{x}.$$

Beispiel 2. Methode von Cesàro und Knopp[4]).

Sei x positiv ganzzahlig, und

$$\varphi_0(x) = 1,$$

$$\varphi_\nu(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{x+k-1} \cdot \frac{x-2}{x+k-2} \cdot \ldots \cdot \frac{x-\nu}{x+k-\nu} & \text{für} \quad 1 \leqq \nu \leqq x, \\ 0 & \text{für} \quad \nu > x, \end{cases}$$

k eine positive Konstante ist; für $k = 1$ kommt das vorige Beispiel. ch hier sind die Bedingungen (A) und (B*) augenscheinlich erfüllt. ist

[3]) Nicht darin enthalten ist, soviel ich sehe, die Methode von Stieltjes. Aber h diese läßt sich subsumieren, wenn man Folgen summatorischer Funktionen von i Veränderlichen in Betracht zieht. Wir sehen davon ab.

[4]) E. Cesàro, Sur la multiplication des séries, Bulletin des sciences mathé-iques, sér. 2, **14** (1890), S. 114–120. — K. Knopp, Multiplikation divergenter hen. Sitzungsberichte der Berliner mathematischen Gesellschaft. 7 (1907), S. 1–12.

$$\Phi(x) = \sum_{\nu=0}^{x} a_\nu \varphi_\nu(x) = \sum_{\nu=0}^{x-1} s_\nu [\varphi_\nu(x) - \varphi_{\nu+1}(x)] + s_x \varphi_x(x)$$

$$= \sum_{\nu=0}^{x-1} s_\nu \frac{x}{x+k-1} \frac{x-1}{x+k-2} \cdots \frac{x-\nu}{x+k-\nu-1} \frac{k}{x}$$

$$= \frac{\sum_{\nu=0}^{x-1} s_\nu \binom{k+x-\nu-2}{x-\nu-1}}{\binom{k+x-1}{x-1}},$$

und daher

$$\sigma = \lim_{x=\infty} \frac{\sum_{\nu=0}^{x-1} s_\nu \binom{k+x-\nu-2}{x-\nu-1}}{\binom{k+x-1}{x-1}},$$

wie Cesàro (für ganzzahlige k) und Knopp (für beliebige k) angegeben haben.

Beispiel 3. Der Abelsche Stetigkeitssatz.

Sei

$$\varphi_\nu(x) = \left(\frac{x}{x+1}\right)^\nu.$$

Offenbar sind wieder die Bedingungen (A) und (B*) erfüllt, und es ist

$$\Phi(x) = \sum_{\nu=0}^{x} a_\nu \left(\frac{x}{x+1}\right)^\nu.$$

Daher, wenn $\frac{x}{x+1} = t$ gesetzt wird,

$$\sigma = \lim_{t=1} \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu t^\nu,$$

wobei t wachsend gegen 1 wandern muß.

Beispiel 4. Exponentielle Summation von Borel[5]).

Sei

$$\varphi_\nu(x) = \frac{1}{\nu!} \int_0^x e^{-t} t^\nu dt.$$

Die Bedingung (A) ist hier offenbar erfüllt; ferner folgt durch partielle Integration:

$$\varphi_\nu(x) = \frac{1}{(\nu+1)!} e^{-x} x^{\nu+1} + \varphi_{\nu+1}(x),$$

---

[5]) E. Borel, Fondements de la théorie des séries divergentes sommables, Journal de mathématiques pures et appliquées, sér. 5, 2 (1896), S. 103–122. — Mémoire sur les séries divergentes, Annales scientifiques de l'école normale supérieure, sér. 3, 16 (1899), S. 9–131. — Lecons sur les séries divergentes. Paris 1901.

raus man leicht erkennt, daß auch die Bedingung (B*) erfüllt ist. an erhält zunächst:

$$\Phi(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{a_\nu}{\nu!} \int_0^x e^{-t} t^\nu \, dt.$$

enn aber diese Reihe für alle (beliebig großen) x konvergiert, so wird allgemeines Glied mit wachsendem ν (bei festem x) beliebig klein, d wegen

$$\int_0^x e^{-t} t^\nu \, dt > \int_0^x e^{-x} t^\nu \, dt = e^{-x} \frac{x^{\nu+1}}{\nu+1}$$

daher erst recht

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{a_\nu}{\nu!} \frac{x^{\nu+1}}{\nu+1} = 0.$$

as gilt für beliebig große x, woraus man leicht sieht, daß die Reihe

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{a_\nu}{\nu!} t^\nu$$

ständig konvergiert. Folglich darf man oben in $\Phi(x)$ die Reihenfolge n Integration und Summation vertauschen und erhält:

$$\Phi(x) = \int_0^x e^{-t} \left(\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{a_\nu}{\nu!} t^\nu \right) dt.$$

aher schließlich

$$\sigma = \int_0^\infty e^{-t} \left(\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{a_\nu}{\nu!} t^\nu \right) dt,$$

so die Borelsche Definitionsformel.

Beispiel 5. Verallgemeinerte exponentielle Summation.

Setzt man

$$\eta_\nu(x) = \frac{1}{\Gamma(k\nu+\delta)} \int_0^x e^{-t} t^{k\nu+\delta-1} \, dt,$$

o k und δ positive Konstanten sind (für $k = \delta = 1$ ergibt sich das rige Beispiel), so erhält man

$$\Phi(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{a_\nu}{\Gamma(k\nu+\delta)} \int_0^x e^{-t} t^{k\nu+\delta-1} \, dt = \int_0^x e^{-t} \left(\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{a_\nu}{\Gamma(k\nu+\delta)} t^{k\nu+\delta-1} \right) dt;$$

nn die Vertauschung von Integration und Summation läßt sich genau e vorhin begründen. Also ist

$$\sigma = \int_0^\infty e^{-t} \left(\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{a_\nu}{\Gamma(k\nu+\delta)} t^{k\nu+\delta-1} \right) dt.$$

Zur Rechtfertigung ist nur zu zeigen, daß

$$\varphi_\nu(x) \geqq \varphi_{\nu+1}(x)$$

ist, da ja die anderen Bedingungen für fallende summatorische Folgen offenbar erfüllt sind. Nun ist

$$\begin{aligned}\Gamma(k)\,\Gamma(k\nu+\delta)\,\varphi_\nu(x) &= \int_0^x e^{-u}u^{k-1}\,du \cdot \int_0^x e^{-t}t^{k\nu+\delta-1}\,dt \\ &= \int_0^x \Big(e^{-u}u^{k-1}\int_0^x e^{-t}t^{k\nu+\delta-1}\,dt\Big)\,du \\ &> \int_0^x \Big(e^{-u}u^{k-1}\int_0^{x-u} e^{-t}t^{k\nu+\delta-1}\,dt\Big)\,du \\ &= \int_0^x \Big(e^{-u}u^{k-1}\int_u^x e^{u-v}(v-u)^{k\nu+\delta-1}\,dv\Big)\,du.\end{aligned}$$

Also durch Vertauschung der Integrationsreihenfolge:

$$\Gamma(k)\,\Gamma(k\nu+\delta)\,\varphi_\nu(x) > \int_0^x \Big(e^{-v}\int_0^v u^{k-1}(v-u)^{k\nu+\delta-1}\,du\Big)\,dv.$$

Das innere Integral läßt sich aber sofort auf eine Betafunktion zurückführen und hat den Wert

$$\frac{\Gamma(k)\,\Gamma(k\nu+\delta)}{\Gamma(k\nu+k+\delta)}\,v^{k\nu+k+\delta-1},$$

so daß die vorige Ungleichung übergeht in:

$$\varphi_\nu(x) > \frac{1}{\Gamma(k\nu+k+\delta)}\int_0^x e^{-v}v^{k\nu+k+\delta-1}\,dv = \varphi_{\nu+1}(x). \qquad \text{W. z. b. w.}$$

Beispiel 6. Methode von Le Roy[6]).

Sei

$$\varphi_\nu(x) = \frac{\Gamma(\nu t+1)}{\Gamma(\nu+1)}, \qquad t = \frac{x}{x+1}.$$

Die Bedingung (A) ist hier offenbar erfüllt; ebenso die erste und dritte der Ungleichungen (B*). Aber auch die zweite ist erfüllt; denn es ist

$$\begin{aligned}\varphi_\nu(x) - \varphi_{\nu+1}(x) &= \frac{\Gamma(\nu t+1)}{\Gamma(\nu+1)} - \frac{\Gamma(\nu t+t+1)}{\Gamma(\nu+2)} > \frac{\Gamma(\nu t+1)}{\Gamma(\nu+1)} - \frac{\Gamma(\nu t+2)}{\Gamma(\nu+2)} \\ &= \frac{\Gamma(\nu t+1)}{\Gamma(\nu+1)}\cdot\Big(1-\frac{\nu t+1}{\nu+1}\Big) \geqq 0.\end{aligned}$$

[6]) E. Le Roy, Sur les séries divergentes et les fonctions définies par un développement de Taylor, Annales de la Faculté des sciences de Toulouse pour les sciences mathématiques et les sciences physiques, sér. 2, 2 (1900), S. 317—430.

mit bilden die Funktionen $\varphi_\nu(x)$ eine fallende summatorische Folge. ist

$$\Phi(x) = \sum_{\nu=0}^{x} a_\nu \frac{\Gamma(\nu t+1)}{\Gamma(\nu+1)},$$

d daher

$$\sigma = \lim_{t=1} \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \frac{\Gamma(\nu t+1)}{\Gamma(\nu+1)},$$

t wachsend gegen 1 wandern muß.

Beispiel 7. Sei $\varphi_\nu(x) = \frac{x}{x+\nu}$. Die Bedingungen (A) und (B^*) d offenbar erfüllt, und es ist

$$\Phi(x) = \sum_{\nu=0}^{x} a_\nu \frac{x}{x+\nu};$$

her

$$\sigma = \lim_{x=\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \frac{x}{x+\nu}.$$

Beispiel 8. Sei $\varphi_0(x) = 1$ und für $\nu \geqq 1$

$$\varphi_\nu(x) = \frac{x}{x+k} \frac{x+1}{x+k+1} \cdots \frac{x+\nu-1}{x+k+\nu-1},$$

k eine positive Zahl ist (für $k=1$ erhält man das vorige Beispiel). er sind die Bedingungen (A) und (B^*) ebenfalls erfüllt, und man erhält:

$$\Phi(x) = a_0 + \sum_{\nu=1}^{x} a_\nu \frac{x}{x+k} \frac{x+1}{x+k+1} \cdots \frac{x+\nu-1}{x+k+\nu-1},$$

$$\sigma = a_0 + \lim_{x=\infty} \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \frac{x}{x+k} \frac{x+1}{x+k+1} \cdots \frac{x+\nu-1}{x+k+\nu-1}.$$

Beispiel 9. Sei $f(x)$ eine für alle positiven x definierte positive, noton wachsende Funktion, und

$$\lim_{x=0} f(x) = 0, \qquad \lim_{x=\infty} f(x) = 1.$$

rner sei $\vartheta_0, \vartheta_1, \vartheta_2, \ldots$ eine monoton nach Null abnehmende Folge sitiver Zahlen. Dann bilden augenscheinlich die Funktionen

$$\varphi_\nu(x) = f(\vartheta_\nu x)$$

e summatorische Folge, und man erhält:

$$\Phi(x) = \sum_{\nu=0}^{x} a_\nu f(\vartheta_\nu x),$$

$$\sigma = \lim_{x=\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu f(\vartheta_\nu x).$$

Die Glieder der Reihe $\Phi(x)$ werden hier absolut um so kleiner, die Aussicht auf Konvergenz und Brauchbarkeit der Methode also um so größer, je rascher die Folge ϑ_ν gegen Null konvergiert.

Beispiel 10. Sei

$$\varphi_\nu(x) = \frac{x^{\nu+1}}{x(x+1)\dots(x+\nu)}.$$

Die Bedingungen (A) und (B*) sind wieder erfüllt. Es ist zunächst

$$\Phi(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{a_\nu x^{\nu+1}}{x(x+1)\dots(x+\nu)} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{a_\nu}{\nu!} \int_0^x \left(1-\frac{t}{x}\right)^{x-1} t^\nu \, dt.$$

Wenn aber diese Reihe für beliebig große x konvergiert, so sieht man leicht, daß

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{a_\nu}{\nu!} t^\nu$$

eine beständig konvergente Potenzreihe ist. Daher kann man in $\Phi(x)$ die Reihenfolge von Integration und Summation vertauschen und erhält:

$$\Phi(x) = \int_0^x \left(1-\frac{t}{x}\right)^{x-1} \left(\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{a_\nu}{\nu!} t^\nu\right) dt.$$

Folglich

$$\sigma = \lim_{x=\infty} \int_0^x \left(1-\frac{t}{x}\right)^{x-1} \left(\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{a_\nu}{\nu!} t^\nu\right) dt.$$

Beispiel 11. Mit $\varphi_\nu(x)$ ist auch, wie sofort zu sehen, $[\varphi_\nu(x)]^k$ eine fallende summatorische Folge, wenn k irgendeine positive Zahl. Wendet man das etwa auf das erste Beispiel an, so erhält man die Methode von M. Rieß[7]). Die Anwendung auf das vierte Beispiel gibt mit $k = 2$

$$\varphi_\nu(x) = \frac{1}{(\nu!)^2} \int_0^x e^{-t} t^\nu \, dt \cdot \int_0^x e^{-u} u^\nu \, du = \frac{1}{(\nu!)^2} \int_0^x \int_0^x e^{-t-u} (tu)^\nu \, dt \, du.$$

Daher ist

$$\Phi(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{a_\nu}{(\nu!)^2} \int_0^x \int_0^x e^{-t-u} (tu)^\nu \, dt \, du$$

$$= \int_0^x \int_0^x e^{-t-u} \left(\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{a_\nu}{(\nu!)^2} (tu)^\nu\right) dt \, du;$$

[7]) M. Rieß, Une méthode de sommation équivalente à la méthode des moyennes arithmétiques, Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences **152** (1911), S. 1651–1654.

ie Vertauschung von Integration und Summation rechtfertigt sich genau
ie im Beispiel 4.

Nach dieser Methode kann z. B. die Reihe

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^{\nu}\nu!\,z^{\nu},$$

obald $\Re(z) \geqq 0$ ist, summiert werden. Man erhält

$$\Phi(x)=\int_0^x\int_0^x e^{-t-u-ztu}\,dt\,du.$$

lso

$$\sigma=\lim_{x=\infty}\Phi(x)=\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-t-u-ztu}\,dt\,du,$$

der wenn man die Integration nach t ausführt:

$$\sigma=\int_0^{\infty}\frac{e^{-u}}{1+zu}\,du.$$

Diese Beispiele mögen genügen; weitere lassen sich leicht bilden.

§ 3.

Abhängigkeit des Reihenwertes von der summatorischen Folge.

Nach unserer Definition hängt der Wert einer divergenten Reihe
ıßer von den Reihengliedern auch von der gewählten summatorischen
olge ab. Und zwar ist diese Abhängigkeit nicht nur eine begriffliche,
ndern in hohem Maße auch eine effektive, indem sich der Wert einer
eihe mit der summatorischen Folge in weitem Umfang ändern kann.
eispielsweise ist die Reihe

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^{\nu}$$

it Hilfe der fallenden summatorischen Folge

$$\varphi_{2\nu}(x)=\varphi_{2\nu+1}(x)=\left(\frac{x}{x+1}\right)^{\nu}$$

mmierbar und hat den Wert 0. Mit Hilfe der Folge

$$\varphi_0(x)=1,\qquad \varphi_{2\nu-1}(x)=\varphi_{2\nu}(x)=\left(\frac{x}{x+1}\right)^{\nu}$$

sie ebenfalls summierbar, hat aber den Wert 1; mit Hilfe der dritten
lge

$$\varphi_{\nu}(x)=\left(\frac{x}{x+1}\right)^{\nu}$$

t sie den Wert $\frac{1}{2}$. Allgemeiner beweisen wir jetzt

Satz 3. *Die Glieder der divergenten Reihe* $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$ *seien reell, und die Folge der Partialsummen* $s_0, s_1, \ldots$ *sei beschränkt. Setzt man dann*

$$\liminf_{\nu=\infty} s_\nu = g, \qquad \limsup_{\nu=\infty} s_\nu = G,$$

und ist γ *eine beliebige Zahl des Intervalls* $g \leqq \gamma \leqq G$, *so gibt es fallende summatorische Folgen, mit deren Hilfe die Reihe summierbar ist und den Wert* γ *hat.*

Aus der Folge der Partialsummen läßt sich eine Teilfolge $s_{\lambda_0}, s_{\lambda_1}, s_{\lambda_2}, \ldots$ herausheben mit dem Grenzwert g, ebenso eine Teilfolge $s_{\mu_0}, s_{\mu_1}, s_{\mu_2}, \ldots$ mit dem Grenzwert G. Ist dann ν irgendein Index, so gibt es einen kleinsten Index ϱ und einen kleinsten Index σ derart, daß

$$\nu \leqq \lambda_\varrho, \qquad \nu \leqq \mu_\sigma$$

ist; wir setzen

$$\varrho = \varrho(\nu), \qquad \sigma = \sigma(\nu).$$

Offenbar ist

$$\varrho(\nu+1) \geqq \varrho(\nu), \qquad \sigma(\nu+1) \geqq \sigma(\nu) \tag{6}$$

$$\lim_{\nu=\infty} \varrho(\nu) = \infty, \qquad \lim_{\nu=\infty} \sigma(\nu) = \infty. \tag{7}$$

Sind nun α, β zwei reelle Zahlen, und zwar

$$\alpha \geqq 0, \qquad \beta \geqq 0,$$

wobei jedoch nicht beidemal Gleichheit statthat, so sei

$$\varphi_\nu(x) = \frac{\alpha \sum_{\lambda=\varrho(\nu)}^{\infty} t^\lambda + \beta \sum_{\lambda=\sigma(\nu)}^{\infty} t^\lambda}{(\alpha+\beta) \sum_{\lambda=0}^{\infty} t^\lambda}, \qquad t = \frac{x}{x+1} \tag{8}$$

Augenscheinlich ist $0 < \varphi_\nu(x) \leqq 1$, und wegen (6) auch $\varphi_{\nu+1}(x) \leqq \varphi_\nu(x)$. Außerdem beweist man leicht, daß $\varphi_\nu(x)$ für $x \to \infty$, das ist $t \to 1$, dem Grenzwert 1 zustrebt, und somit bilden die Funktionen $\varphi_\nu(x)$ eine fallende summatorische Folge. Wir wollen sie auf unsere Reihe anwenden. In der Identität

$$\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu \varphi_\nu(x) = \sum_{\nu=0}^{n-1} s_\nu [\varphi_\nu(x) - \varphi_{\nu+1}(x)] + s_n \varphi_n(x)$$

kann man, da wegen (7) $\lim_{\nu=\infty} \varphi_\nu(x) = 0$ ist, und da die s_ν nach Voraussetzung beschränkt sind, den Grenzprozeß $n \to \infty$ durchführen und erhält:

$$\Phi(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} s_\nu [\varphi_\nu(x) - \varphi_{\nu+1}(x)].$$

Nach der Definition von $\varphi_\nu(x)$ ist aber $\varphi_\nu(x) - \varphi_{\nu+1}(x) = 0$, außer enn in einer der Ungleichungen (6) das Größerzeichen gilt, wenn also gleich einem λ_ϱ oder einem μ_σ ist. Man erhält danach

$$\Phi(x) = \frac{\alpha \sum_{\varrho=0}^{\infty} s_{\lambda_\varrho} t^\varrho + \beta \sum_{\sigma=0}^{\infty} s_{\mu_\sigma} t^\sigma}{(\alpha+\beta) \sum_{\varrho=0}^{\infty} t^\varrho} = \frac{\alpha \Omega_1(t) + \beta \Omega_2(t)}{(\alpha+\beta)\Omega_3(t)}. \tag{9}$$

un erkennt man leicht[8]), weil $\lim_{\varrho=\infty} s_{\lambda_\varrho} = g$, $\lim_{\sigma=\infty} s_{\mu_\sigma} = G$ ist:

$$\lim_{t=1} \frac{\Omega_1(t)}{\Omega_3(t)} = g, \quad \lim_{t=1} \frac{\Omega_2(t)}{\Omega_3(t)} = G,$$

daß aus (9) folgt:

$$\lim_{x=\infty} \Phi(x) = \frac{\alpha g + \beta G}{\alpha+\beta}.$$

Die rechte Seite stellt aber bei geeigneter Wahl von α, β jede Zahl γ s Intervalles $g \leqq \gamma \leqq G$ dar, und damit ist Satz 3 bewiesen.

§ 4.

Beständige summatorische Folgen.

Mit der im vorigen Paragraphen behandelten Vielwertigkeit einer eihe hängt es zusammen, daß oft zwei so nahe verwandte Reihen wie

$$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \ldots, \tag{10}$$

$$0 + a_0 + a_1 + a_2 + \ldots \tag{11}$$

t Hilfe derselben summatorischen Folge summierbar sind, aber verniedene Werte haben. Mit Hilfe der summatorischen Folge

$$\varphi_{2\nu}(x) = \varphi_{2\nu+1}(x) = \left(\frac{x}{x+1}\right)^\nu$$

beispielsweise

$$1 - 1 + 1 - 1 + \ldots = 0,$$

$$0 + 1 - 1 + 1 - \ldots = 1.$$

Da es nun eine durchaus wünschenswerte Rechenregel ist, daß die ihen (10) und (11) nie verschiedene Werte haben, und daß auch durch rsetzen von beliebig vielen, etwa p Nullen sich der Wert nicht ändert, gibt sich, daß unsere Summationstheorie etwas zu allgemein ist. Wir ränken sie ein durch die Definition:

[8]) Vgl. § 83, Hilfssatz 1 meines Buches: Die Lehre von den Kettenbrüchen. pzig und Berlin 1913.

Eine summatorische Folge $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \ldots$ *heißt beständig, wenn* $\ldots$ *die Grenzwerte*

$$\lim_{x=\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \varphi_\nu(x), \qquad \lim_{x=\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \varphi_{\nu+p}(x),$$

so oft sie beide existieren, einander gleich sind.

In der Tat wird durch Beschränkung auf beständige summatorische Folgen der obige Übelstand vermieden. Denn es ist ja

$$a_0 + a_1 + \ldots + a_{p-1} + a_p + a_{p+1} + \ldots = \lim_{x=\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \varphi_\nu(x),$$

$$0 + 0 + \ldots + 0 + a_0 + a_1 + \ldots = \lim_{x=\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \varphi_{\nu+p}(x),$$

so daß die beiden Reihensummen jetzt einander gleich sind. Allgemeiner beweist man sofort

Satz 4. *Wenn man bei einer Reihe, die mit Hilfe einer beständigen summatorischen Folge summierbar ist und den Wert s hat, eine endliche Zahl von Gliedern an beliebigen Stellen hinzufügt oder wegläßt, und wenn die neue Reihe mit Hilfe derselben Folge ebenfalls summierbar ist, so hat sie den Wert* $1 \pm c$, *wo* c *die Summe der hinzugefügten oder weggelassenen Glieder ist.*

Durch Beschränkung auf *beständige* summatorische Folgen wird auch die Vielwertigkeit einer Reihe erheblich eingeschränkt. Wenn z. B. die geometrische Reihe

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} z^\nu$$

mit Hilfe einer beständigen summatorischen Folge summierbar ist, so hat sie stets den Wert $\frac{1}{1-z}$. In der Tat, bezeichnet man ihren Wert zunächst mit σ, so ist auch

$$\sigma = 1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} z^\nu = 1 + z \sum_{\nu=0}^{\infty} z^\nu = 1 + z\sigma,$$

also $\sigma = \frac{1}{1-z}$, w. z. b. w.

Es dürfte schwer sein, ein allgemeines Kriterium dafür anzugeben, daß eine summatorische Folge beständig ist. Es soll aber jetzt gezeigt werden, daß das bei den meisten Beispielen des § 2 der Fall ist.

Satz 5. *Die in den Beispielen* 1, 2, 3, 7, 8 *angegebenen summatorischen Folgen, ebenso die Folge des Beispiels* 9, *falls man* $\vartheta_\nu = \vartheta^\nu$

ählt $(0 < \vartheta < 1)$, *endlich die in Beispiel* 11 *erwähnte Rießsche Folge nd beständig.*

Wenn nämlich mit ihrer Hilfe eine der beiden Reihen

$$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \ldots,$$
$$0 + a_0 + a_1 + a_2 + \ldots$$

ummierbar ist, so ist es auch die andere, und beide haben den gleichen ert.

Zum Beweis setzen wir

2) $$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \varphi_\nu(x) = \Phi(x), \quad \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \varphi_{\nu+1}(x) = \Omega(x).$$

ann ist zu zeigen, daß, wenn von den beiden Grenzwerten

3) $$\lim_{x=\infty} \Phi(x), \quad \lim_{x=\infty} \Omega(x)$$

r eine existiert, stets auch der andere existiert, und daß dann beide nander gleich sind. Das ergibt sich aber sofort aus den folgenden entitäten, die man ohne weiteres verifiziert:

Im Fall von Beispiel 1 ist

$$\Omega(x) = \frac{x-1}{x} \Phi(x-1).$$

Im Fall von Beispiel 2 ist

$$\Omega(x) = \frac{x-1}{x+k-1} \Phi(x-1).$$

Im Fall von Beispiel 3 ist

$$\Omega(x) = \frac{x}{x+1} \Phi(x).$$

Im Fall von Beispiel 7 ist

$$\Omega(x) = \frac{x}{x+1} \Phi(x+1).$$

Im Fall von Beispiel 8 ist

$$\Omega(x) = \frac{x}{x+k} \Phi(x+1).$$

Im Fall von Beispiel 9 mit $\vartheta_\nu = \vartheta^\nu$ ist

$$\Omega(x) = \Phi(\vartheta x).$$

Im Fall der Rießschen Folge (Beispiel 11) ist

$$\Omega(x) = \left(\frac{x-1}{v}\right)^k \Phi(x-1).$$

Satz 6. *Die in den Beispielen 4, 5 angegebenen summatorischen Folgen sind beständig. Wenn nämlich mit ihrer Hilfe von den beiden Reihen*

$$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \ldots,$$
$$0 + a_0 + a_1 + a_2 + \ldots$$

die erste summierbar ist, so ist es auch die zweite, und beide haben den gleichen Wert.

Es ist zu zeigen, daß allemal die Gleichung gilt

$$\lim_{x=\infty} \Omega(x) = \lim_{x=\infty} \Phi(x), \tag{14}$$

sobald der rechts stehende Grenzwert existiert. Nun ist im Fall von Beispiel 4

$$\Phi(x) = \int_0^x e^{-t} \Big(\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{a_\nu}{\nu!} t^\nu \Big) dt,$$

$$\Omega(x) = \int_0^x e^{-t} \Big(\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{a_\nu}{(\nu+1)!} t^{\nu+1} \Big) dt.$$

Also, wenn man $\Phi(x)$ partiell integriert,

$$\Phi(x) = e^{-x} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{a_\nu}{(\nu+1)!} x^{\nu+1} + \int_0^x e^{-t} \Big(\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{a_\nu}{(\nu+1)!} t^{\nu+1} \Big) dt = \Omega'(x) + \Omega(x).$$

Hieraus folgt aber in der Tat die Gleichung (14), sobald der rechts stehende Grenzwert existiert (vgl. die in [1]) angeführte Note).

Im Fall des Beispiels 5 ist

$$\Phi(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{a_\nu}{\Gamma(k\nu+\delta)} \int_0^x e^{-t} t^{k\nu+\delta-1} dt,$$

$$\Omega(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{a_\nu}{\Gamma(k\nu+k+\delta)} \int_0^x e^{-t} t^{k\nu+k+\delta-1} dt.$$

Schreibt man in der ersten dieser Formeln ϱ statt x und führt statt t eine neue Integrationsveränderliche v durch die Gleichung $t = \varrho - v$ ein, so folgt:

$$\Phi(\varrho) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{a_\nu}{\Gamma(k\nu+\delta)} \int_0^\varrho e^{v-\varrho} (\varrho - v)^{k\nu+\delta-1} dv.$$

Da hier das Integral, wie leicht zu sehen, kleiner als $\varrho^{k\nu+\delta} : (k\nu+\delta)$ ist, konvergiert die Reihe in jedem endlichen Intervall von ϱ gleichmäßig. Multipliziert man also mit $e^\varrho (x-\varrho)^{k-1}$ und integriert dann nach ϱ von 0 bis x, so darf das gliedweise geschehen, und es ergibt sich:

$$\Phi(\varrho)e^{\varrho}(x-\varrho)^{k-1}d\varrho=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{a_\nu}{\Gamma(k\nu+\delta)}\int_0^x\Big((x-\varrho)^{k-1}\int_0^{\varrho}e^{v}(\varrho-v)^{k\nu+\delta-1}dv\Big)d\varrho$$

$$=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{a_\nu}{\Gamma(k\nu+\delta)}\int_0^x\Big(e^{v}\int_v^x(x-\varrho)^{k-1}(\varrho-v)^{k\nu+\delta-1}d\varrho\Big)dv.$$

a aber das innere Integral nach ϱ gleich

$$\frac{\Gamma(k)\Gamma(k\nu+\delta)}{\Gamma(k\nu+k+\delta)}(x-v)^{k\nu+k+\delta-1}$$

t, so folgt weiter:

$$\int_0^x\Phi(\varrho)e^{\varrho}(x-\varrho)^{k-1}d\varrho=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{a_\nu\Gamma(k)}{\Gamma(k\nu+k+\delta)}\int_0^x e^{v}(x-v)^{k\nu+k+\delta-1}dv$$

$$=\Gamma(k)e^{x}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{a_\nu}{\Gamma(k\nu+k+\delta)}\int_0^x e^{-t}t^{k\nu+k+\delta-1}dt.$$

ier ist die rechtsstehende Summe gleich $\Omega(x)$, so daß man schließlich hält:

$$\Omega(x)=\frac{1}{\Gamma(k)}e^{-x}\int_0^x\Phi(\varrho)e^{\varrho}(x-\varrho)^{k-1}d\varrho=\frac{1}{\Gamma(k)}\int_0^x\Phi(x-t)e^{-t}t^{k-1}dt.$$

Wenn nun

15) $$\lim_{x=\infty}\Phi(x)=\sigma$$

t, so ergibt sich aus der letzten Gleichung, indem man beiderseits σ ıbtrahiert:

16) $$\Omega(x)-\sigma=\frac{1}{\Gamma(k)}\int_0^x[\Phi(x-t)-\sigma]e^{-t}t^{k-1}dt-\frac{\sigma}{\Gamma(k)}\int_x^{\infty}e^{-t}t^{k-1}dt.$$

ier hat das zweite Integral für $x\to\infty$ den Grenzwert Null. Ebenso aber uch das erste; denn wegen (15) ist $\Phi(x)$ beschränkt, also

$$|\Phi(x-t)-\sigma|<C,$$

o C von x und t nicht abhängt. Solange aber $0\leqq t\leqq\frac{x}{2}$ ist, wird ußerdem, wenn ε beliebig klein,

$$|\Phi(x-t)-\sigma|<\varepsilon$$

in, sofern nur x genügend groß. Daher ergibt sich die Abschätzung:

$$\left|\int_0^x [\Phi(x-t)-\sigma]\,e^{-t}t^{k-1}\,dt\right| < \int_0^{\frac{x}{2}} \varepsilon e^{-t}t^{k-1}\,dt + \int_{\frac{x}{2}}^{x} C e^{-t}t^{k-1}\,dt$$

$$< \varepsilon\Gamma(k) + C\int_{\frac{x}{2}}^{\infty} e^{-t}t^{k-1}\,dt.$$

In Formel (16) wird also in der Tat auch das erste Integral beliebig klein, und folglich ist

$$\lim_{x=\infty} \Omega(x) = \sigma,$$

w. z. b. w.

Der Satz 6 ist, soweit er sich auf das Beispiel 4 bezieht, bereits von Herrn Hardy bewiesen worden[9]); wir wollen diesen Teil des Satzes noch etwas umgestalten. Da die Funktion $\Phi(x)$ in Beispiel 4, wie leicht zu sehen, gleich

$$\int_0^x e^{-t}\Big(\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{a_\nu}{\nu!}t^\nu\Big)\,dt = e^{-x}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{a_0+a_1+\ldots+a_{\nu-1}}{\nu!}x^\nu$$

ist (beide Seiten haben nämlich gleiche Ableitung nach x), so läßt sich die Gleichung (14) auch folgendermaßen schreiben:

$$\int_0^\infty e^{-t}\Big(\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{a_\nu}{(\nu+1)!}t^{\nu+1}\Big)\,dt = \lim_{x=\infty} e^{-x}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{a_0+a_1+\ldots+a_{\nu-1}}{\nu!}x^\nu,$$

falls die rechte Seite existiert. Setzt man hier $a_\nu = u_{\nu+1}$ und addiert alsdann die evidente Gleichung

$$\int_0^\infty e^{-t}u_0\,dt = \lim_{x=\infty} e^{-x}\Big(u_0+\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{u_0}{\nu!}x^\nu\Big),$$

so erhält man den Satz, daß aus der Beziehung

$$\lim_{x=\infty} e^{-x}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{u_0+u_1+\ldots+u_\nu}{\nu!}x^\nu = s$$

allemal folgt:

$$\int_0^\infty e^{-t}\Big(\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{u_\nu}{\nu!}t^\nu\Big)\,dt = s.$$

Diesen Satz habe ich in meiner eingangs erwähnten Arbeit bewiesen. Er findet sich aber auch, entgegen meinen Angaben, bereits in der damals und jetzt zitierten Hardyschen Arbeit. Herr Hardy sagt allerdings

[9]) G. H. Hardy, Researches in the theory of divergent series and divergent integrals, The quarterly journal of pure and applied mathematics, **35** (1903), S. 22—66.

nächst, daß aus der ersten Formel nicht die zweite folgt, meint das er offenbar nur im Sinne eines *unmittelbaren* Folgens; denn er gewinnt nige Seiten später den richtigen Tatbestand. Dieser Umstand, auf den von anderer Seite aufmerksam gemacht worden bin, war mir damals der entgangen, und ich benutze daher diese Gelegenheit zur Richtigllung.

Herr Hardy zeigt auch a. a. O. an einem Beispiel, daß Satz 6 sich ht umkehren läßt. Vielmehr kann es vorkommen, daß von den beiden ihen dieses Satzes die zweite summierbar ist, die erste aber nicht, daß o von den Grenzwerten (13) nur der zweite existiert. Ein anderes ispiel dieser Art erhält man, wenn man die Reihenglieder a_ν durch die rmel definiert:

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{a_\nu}{(\nu+1)!} t^{\nu+1} = f'(t) - f(t), \quad f(t) = 1 + e^t \frac{\sin(t^2)}{t}.$$

nn ist nämlich

$$\Phi(x) = \int_0^x e^{-t}[f''(t) - f'(t)]\,dt = e^{-x} f'(x) - 1$$

$$= \frac{\sin(x^2)}{x} - \frac{\sin(x^2)}{x^2} + 2\cos(x^2) - 1,$$

$$\Omega(x) = \int_0^x e^{-t}[f'(t) - f(t)]\,dt = e^{-x} f(x) - 1$$

$$= \frac{\sin(x^2)}{x} - e^{-x} - 1.$$

ist also $\lim_{x=\infty} \Omega(x) = -1$, während $\lim_{x=\infty} \Phi(x)$ nicht existiert.

§ 5.

Theoreme über einige besondere summatorische Folgen.

Wir beschäftigen uns zum Schluß noch kurz mit einigen speziellen mmatorischen Folgen, die in der Literatur noch nicht vorkommen.

Satz 7. *Mit Hilfe der summatorischen Folge* (*siehe Beispiel* 8)

$$\varphi_0(x) = 1, \quad \varphi_\nu(x) = \frac{x(x+1)\dots(x+\nu-1)}{(x+k)(x+k+1)\dots(x+k+\nu-1)} \qquad (k > 0)$$

die Binomialreihe

$$1 + \frac{\lambda}{1} z + \frac{\lambda(\lambda+1)}{1\cdot 2} z^2 + \frac{\lambda(\lambda+1)(\lambda+2)}{1\cdot 2\cdot 3} z^3 + \dots,$$

nn $\Re(\lambda) < k+1$ *ist, auf dem ganzen Einheitskreis summierbar und t den Wert* $(1-z)^{-\lambda}$, *allenfalls* $z = 1$ *ausgenommen.*

Hier ist nämlich

$$\Phi(x) = 1 + \frac{\lambda}{1}\frac{x}{x+k}z + \frac{\lambda(\lambda+1)}{1\cdot 2}\frac{x(x+1)}{(x+k)(x+k+1)}z^2 + \cdots$$
$$= F(\lambda, x, x+k; z),$$

wo F die hypergeometrische Reihe bedeutet. Wegen $\Re(\lambda) < k+1$ ist sie auf dem Einheitskreis konvergent, höchstens $z = 1$ ausgenommen. Nun ist aber[10])

$$F(\lambda, x, x+k; z) = (1-z)^{-\lambda} + O\left(\frac{1}{x}\right),$$

also in der Tat

$$\lim_{x=\infty} \Phi(x) = (1-z)^{-\lambda}$$

Satz 8. *Ist $f(z)$ (z = reell) eine beschränkte integrierbare Funktion mit der Periode 2π, und ist für einen gewissen Wert z der Grenzwert*

$$\lim_{t=0} \frac{f(z+t)+f(z-t)}{2} = \psi(z)$$

vorhanden, so ist die Fourierreihe von $f(z)$ für diesen Wert z mit Hilfe der summatorischen Folge (siehe Beispiel 8 für $k=2$)

$$\varphi_\nu(x) = \frac{x(x+1)}{(x+\nu)(x+\nu+1)}$$

summierbar und hat den Wert $\psi(z)$.

Insbesondere ist also die Fourierreihe jeder stetigen Funktion summierbar, und ihr Wert ist gleich der Funktion.

Die Fourierreihe ist bekanntlich die folgende:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\,dt + \sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos\nu(t-z)\,dt,$$

wofür man wegen der Periodizität von $f(z)$ auch schreiben kann:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(z+t)\,dt + \sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(z+t)\cos(\nu t)\,dt.$$

Bildet man daher mit Hilfe der obigen summatorischen Folge die Funktion $\Phi(x)$, so ist

---

[10]) Nach Formel (10) Seite 7 meiner Arbeit: Über das Verhalten der hypergeometrischen Reihe bei unbegrenztem Wachstum eines oder mehrerer Parameter, zweiter Teil. Sitzungsberichte der Heidelberger Akademie der Wissenschaften, Math. naturw. Klasse, Abteilung A, Jahrgang 1917, 1. Abhandlung.

$$\Phi(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(z+t)\,dt + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\pi}\,\frac{x(x+1)}{(x+\nu)(x+\nu-1)}\int_{-\pi}^{\pi} f(z+t)\cos(\nu t)\,dt$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(z+t)\left[\frac{1}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{x(x+1)}{(x+\nu)(x+\nu+1)}\cos\nu t\right]dt$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} [f(z+t)+f(z-t)]\left[\frac{1}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{x(x+1)}{(x+\nu)(x+\nu-1)}\cos\nu t\right]dt.$$

Nun findet man leicht:

$$\frac{1}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{x(x+1)}{(x+\nu)(x+\nu+1)}\cos\nu t = \frac{x(x+1)}{2}\int_{0}^{1} v^{x-1}\,\frac{(1+v)(1-v)^2}{1-2v\cos t+v^2}\,dv,$$

daß die vorige Formel übergeht in:

$$\Phi(x) = \frac{x(x+1)}{2\pi}\int_{0}^{\pi}\left\{[f(z+t)+f(z-t)]\int_{0}^{1} v^{x-1}\,\frac{(1+v)(1-v)^2}{1-2v\cos t+v^2}\,dv\right\}dt.$$

ndet man diese Formel speziell auf die Funktion $f(z)=1$ an, so er-
t sich, weil dann auch $\Phi(x)=1$ sein muß:

$$1 = \frac{x(x+1)}{2\pi}\int_{0}^{\pi}\left\{2\int_{0}^{1} v^{x-1}\,\frac{(1+v)(1-v)^2}{1-2v\cos t+v^2}\,dv\right\}dt.$$

nn man diese Gleichung mit $\psi(z)$ multipliziert und dann von der
igen subtrahiert, erhält man:

$$\Phi(x) - \psi(z) = \frac{x(x+1)}{2\pi}\int_{0}^{\pi}\left\{F(z,t)\int_{0}^{1} v^{x-1}\,\frac{(1+v)(1-v)^2}{1-2v\cos t+v^2}\,dv\right\}dt,$$

bei

$$F(z,t) = f(z+t)+f(z-t)-2\psi(z).$$

Wegen unserer Voraussetzungen über die Funktion $f(z)$ ist

$$|F(z,t)| < C,$$

C von z und t nicht abhängt; außerdem für hinreichend kleine Werte
t auch

$$|F(z,t)| < \varepsilon.$$

legt man daher in (17) das Integral nach t in die Summe

$$\int_{0}^{\delta} + \int_{\delta}^{\pi}.$$

so ist, wenn δ klein genug gewählt wird, im ersten Integral der Integrand absolut kleiner als

$$\varepsilon \int_0^1 v^{x-1} \frac{(1+v)(1-v)^2}{1-2v\cos t+v^2}\,dv;$$

das Integral selbst ist also absolut kleiner als

$$\varepsilon \int_0^\delta \left(\int_0^1 v^{x-1} \frac{(1+v)(1-v)^2}{1-2v\cos t+v^2}\,dv \right) dt$$

$$= \varepsilon \int_0^1 \left(v^{x-1}(1+v)(1-v)^2 \int_0^\delta \frac{dt}{1-2v\cos t+v^2} \right) dv$$

$$= \varepsilon \int_0^1 v^{x-1}\, 2(1-v) \operatorname{arc\,tg} \frac{\eta(1+v)}{1-v}\,dv \qquad \left(\eta = \operatorname{tg}\frac{\delta}{2}\right)$$

$$< \varepsilon \int_0^1 v^{x-1}(1-v)\,\pi\,dv = \frac{\varepsilon\pi}{x(x+1)}.$$

Im zweiten Integral von (18) ist der Integrand absolut kleiner als

$$C\int_0^1 v^{x-1} \frac{(1+v)(1-v)^2}{1-2v\cos\delta+v^2}\,dv < C\int_0^1 v^{x-1} \frac{2(1-v)^2}{\sin^2\delta}\,dv = \frac{4C}{\sin^2\delta}\,\frac{1}{x(x+1)(x+2)};$$

das Integral selbst ist also absolut kleiner als

$$\frac{4C\pi}{\sin^2\delta}\,\frac{1}{x(x+1)(x+2)}.$$

Setzt man diese Abschätzungen in (18) und (17) ein, so ergibt sich:

$$|\Phi(x)-\psi(z)| < \frac{x(x+1)}{2\pi}\left[\frac{\varepsilon\pi}{x(x+1)} + \frac{4C\pi}{\sin^2\delta}\,\frac{1}{x(x+1)(x+2)}\right]$$

$$= \frac{\varepsilon}{2} + \frac{2C}{\sin^2\delta}\,\frac{1}{x+2}.$$

Hier kann man ε beliebig klein wählen, wodurch δ bestimmt wird. Durch Vergrößerung von x erreicht man dann, daß auch das zweite Glied kleiner als $\frac{\varepsilon}{2}$ wird, woraus folgt:

$$\lim_{x=\infty} \Phi(x) = \psi(z),$$

w. z. b. w.

Recht brauchbar scheint die summatorische Folge des Beispiels 10 zu sein, obwohl ich zur Zeit nicht entscheiden kann, ob sie beständig ist. Sie ist für Potenzreihen in einem größeren Bereich anwendbar als die Borelsche exponentielle Summation, wenn auch nicht wie die Methode von Le Roy im ganzen Mittag-Lefflerschen Stern.

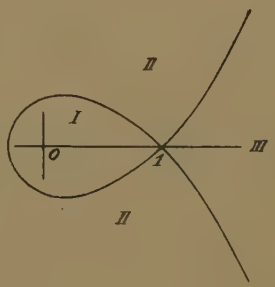
Wir konstruieren zunächst in einer komplexen z-Ebene die Kurve
t der Gleichung

$$|z e^{-z}| = e^{-1},$$

er wenn $z = \xi + i\eta$ gesetzt wird,

$$\eta^2 = e^{2\xi-2} - \xi^2 = (\xi-1)^2 + \sum_{\nu=3}^{\infty} \frac{2^\nu (\xi-1)^\nu}{\nu!}.$$

e Kurve hat an der Stelle $z = 1$ einen Doppel-
nkt und teilt die Ebene in die drei Gebiete
II, III der Figur. Es ist



$$|z e^{-z}| < e^{-1} \text{ in I und III,}$$
$$|z e^{-z}| > e^{-1} \text{ in II.}$$

an macht sich hiernach leicht eine Vorstellung
on dem Verlauf der Kurvenschar

$$|z e^{-z}| = \text{konst.}$$

Nach diesen Vorbereitungen beweisen wir

Satz 9. *Wenn z nicht im Innern oder auf dem Rand des Ge-
etes* III *liegt, so ist die geometrische Reihe*

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} z^\nu$$

it Hilfe der summatorischen Folge

$$\varphi_\nu(x) = \frac{x^{\nu+1}}{x(x+1)\dots(x+\nu)}$$

mmierbar und hat den Wert $\frac{1}{1-z}$.

Nach den Ausführungen auf Seite 294 ist

$$\Phi(x) = \int_0^x \left(1 - \frac{t}{x}\right)^{x-1} e^{zt}\, dt,$$

der wenn man $t = \frac{x}{z}(z-u)$ setzt,

9) $$\Phi(x) = x \int_0^z \left(\frac{u e^{-u}}{z e^{-z}}\right)^x \frac{du}{u}.$$

Wenn nun z nicht im Gebiet III liegt (auch nicht auf dem Rand),
läßt sich der Integrationsweg für u so abändern, daß auf ihm dauernd

$$|u e^{-u}| \leqq |z e^{-z}|$$

t, und zwar Gleichheit nur im Endpunkt $u = z$. Insbesondere läßt es
ch einrichten, daß der Quotient

(20) $$\frac{ue^{-v}}{ze^{-z}}$$

in der Nähe der Stelle z *reell* und kleiner als 1 ist. Man kann dann das Integral in (19) in die Summe von zwei Integralen zerlegen, indem man zuerst von $u = 0$ bis in beliebige Nähe von $u = z$ integriert, und dann über den Rest des Weges. Auf dem ersten Weg hat der absolute Betrag von (20) ein Maximum g, welches kleiner als 1 ist. Das Integral für diesen Teil des Weges ist daher $O(g^x)$. Auf dem Rest des Weges kann man

$$\frac{ue^{-u}}{ze^{-z}} = e^{-v}$$

setzen, wobei v von der beliebig kleinen Zahl ε bis 0 läuft. Man hat dann, wenn ε, also v, klein genug ist:

$$u = z + \frac{z}{z-1}v + av^2 + bv^3 + \ldots,$$

also

$$\frac{du}{u} = \frac{1}{z-1}(1 + \alpha v + \beta v^2 + \ldots)dv.$$

Setzt man das in (19) ein, so folgt:

(21) $$\Phi(x) = \frac{x}{z-1}\int_{\varepsilon}^{0} e^{-vx}(1 + \alpha v + \beta v^2 + \ldots)dv + O(xg^x).$$

Nun ist für $0 \leqq v \leqq \varepsilon$

$$|\alpha v + \beta v^2 + \ldots| < Cv,$$

wo C von v nicht abhängt; also

$$\left|\int_{\varepsilon}^{0} e^{-vx}(\alpha v + \beta v^2 + \ldots)dv\right| < \int_{0}^{\varepsilon} e^{-vx}Cv\,dv = O\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

Daher nach (21):

$$\Phi(x) = \frac{x}{z-1}\int_{\varepsilon}^{0} e^{-vx}dv + O\left(\frac{1}{x}\right) + O(xg^x) = \frac{1-e^{-\varepsilon x}}{1-z} + O\left(\frac{1}{x}\right) + O(xg^x),$$

und folglich

$$\lim_{x=\infty}\Phi(x) = \frac{1}{1-z},$$

w. z. b w.

Wenn man für $\Phi(x)$ den ursprünglichen Ausdruck einsetzt, besagt die soeben gewonnene Formel:

(22) $$\lim_{x=\infty}\int_{0}^{x}\left(1 - \frac{t}{x}\right)^{x-1}e^{zt}dt = \frac{1}{1-z}.$$

Ist T ein abgeschlossenes Gebiet für die Variable z, welches keinen
nkt des Gebietes III (auch keinen Randpunkt von III) enthält, so
ht man aus unserem Beweisgang unschwer, daß der Grenzwert (22)
T gleichmäßig erreicht wird.

Nun sei

3) $$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu$$

ne Potenzreihe mit endlichem, von Null verschiedenem Konvergenzradius.
e dadurch definierte Funktion $f(z)$ hat auf dem Konvergenzkreis wenig-
ens einen singulären Punkt und kann bei geradliniger analytischer Fort-
zung weitere singuläre Punkte haben. Wir konstruieren nun durch
ehung um den Nullpunkt und Ähnlichkeitstransformation mit dem Null-
nkt als Ähnlichkeitspunkt eine zur Randkurve des Gebietes III ähnliche
rve, deren Ecke in einem singulären Punkt liegt. Wird diese Kon-
uktion für jeden singulären Punkt gemacht, so entsteht ein offenes
er geschlossenes krummliniges Polygon P, und wir behaupten, *daß die
ihe* (23) *im Innern dieses Polygons summierbar ist und den Wert $f(z)$ hat.*

In der Tat ist jetzt

$$\Phi(x) = \int_0^x \left(1 - \frac{t}{x}\right)^{x-1} \left(\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{a_\nu z^\nu t^\nu}{\nu!}\right) dt.$$

aber bekanntlich

$$a_\nu = \frac{1}{2\pi i} \int_K \frac{f(\zeta)}{\zeta^{\nu+1}} d\zeta,$$

der Integrationsweg K den Nullpunkt umschließt, so folgt:

$$\Phi(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^x \left(1 - \frac{t}{x}\right)^{x-1} \left(\sum_{\nu=0}^{\infty} \int_K \frac{f(\zeta)}{\zeta^{\nu+1}} \frac{z^\nu t^\nu}{\nu!} d\zeta\right) dt$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_0^x \left(1 - \frac{t}{x}\right)^{x-1} \left(\int_K \frac{f(\zeta)}{\zeta} e^{\frac{zt}{\zeta}} d\zeta\right) dt,$$

er durch Vertauschung der Integrationsreihenfolge:

4) $$\Phi(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_K \left[\frac{f(\zeta)}{\zeta} \int_0^x \left(1 - \frac{t}{x}\right)^{x-1} e^{\frac{zt}{\zeta}} dt\right] d\zeta.$$

Wenn nun z ein fester Punkt im Innern des Polygons P ist, so
thält die geschlossene Kurve der ζ-Ebene

5) $$\frac{z}{\zeta} = \text{Rand von III}$$

die Punkte $\zeta = 0$ und $\zeta = z$, läßt aber die singulären Punkte außerhalb. Man kann daher für ζ einen zulässigen Integrationsweg konstruieren derart, daß $\frac{z}{\zeta}$ nie dem Innern oder Rand von III angehört, und zwar umschließt dieser Weg notwendig den Punkt z; man braucht nur eine die Kurve (25) umschließende und ihr hinreichend benachbarte Kurve zu wählen. Dann nähert sich aber in (24) nach dem Gesagten das innere Integral für $x \to \infty$ dem Wert $\frac{1}{1-\frac{z}{\zeta}}$, und zwar gleichmäßig für alle in Betracht kommenden Werte von ζ. Also folgt aus (24)

$$\lim_{x=\infty} \Phi(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_K \frac{f(\zeta)}{\zeta} \frac{1}{1-\frac{z}{\zeta}} d\zeta = f(z),$$

w. z. b. w.

(Eingegangen am 2. April 1920.)

Zum Verzerrungssatze der konformen Abbildung.

(Eine Anmerkung zum Artikel von L. Bieberbach in der Math. Zeitschr. **4**, S. 295—305.)

Von

Paul Koebe in Jena.

In vorbezeichnetem Artikel beweist Herr Bieberbach den folgenden atz: „Es gibt Funktionen $\varphi(r)$ derart, daß für $|z| \leqq r < 1$ und jedes in $z| < 1$ schlichte

$$f(z) = z + a_2 z^2 + \ldots$$

$$|\Im \log f'(z)| < \varphi(r)$$

t.“

Da $\Im \log f'(z) = \operatorname{Amp} f'(z)$ ist, so bedeutet dieser Satz *Beschränktheit der Richtungsänderung* der Linienelemente des Gebietes $|z| \leqq r$ durch chranken, die nur von r, nicht jedoch von der Wahl der Funktion $f(z)$ bhängen. Dieser Satz, in gewisser Weise ein Gegenstück oder auch Ergänzungsstück zu meinem Verzerrungssatze, kann als Folgerung aus letzterem ofort gewonnen werden. Mein Verzerrungssatz[1]) liefert nämlich nur von r

[1]) Der Verzerrungssatz ist seit meinen ersten Veröffentlichungen desselben Gegenand vielfacher Erörterung in der Literatur geworden. Es sei mir gestattet, hier die lgenden eigenen und fremden Veröffentlichungen namhaft zu machen.

P. Koebe, „Über die Uniformisierung beliebiger analytischer Kurven“, Gött. achr. 1907, S. 191—210, insbes. S. 203—205; „Über die Uniformisierung der algebrachen Kurven durch automorphe Funktionen mit imaginärer Substitutionsgruppe“, ött. Nachr. 1909, S. 68—76, insbes. S. 73—75; „Über die Uniformisierung der algebrachen Kurven. II“, Math. Ann., **69** (1910), S. 1—81, insbes. § 14; „Abhandlungen zur heorie der konformen Abbildung. III“, Journ. f. Math., **147** (1917), S. 68—104, insbes. 6; „Abhandlungen zur Theorie der konformen Abbildung. V“, Math. Zeitschr., 2 918), S. 198—236, insbes. S. 217—219, 231—232, 235—236.

S. Johansson, „Über einige neuere Fragen aus der Theorie der konformen bbildung“, Acta Soc. Scient. Fenn. 1910.

R. Fricke und F. Klein, „Vorlesungen über die Theorie der automorphen unktionen“, II, Leipzig 1912, S. 496—518, 529—536.

abhängende Schranken der Größe $|f'(z)|$, drückt also *Beschränktheit der Maßstabsänderung* aus in Gestalt von Gleichungen

$$\frac{1}{Q(r)} < |f'(z)| < Q(r), \qquad (Q(r) > 1)$$

oder

$$|\log|f'(z)|| = |\Re \log f'(z)| < \log Q(r),$$

gültig für $|z| \leqq r$. Das gibt für $|z| \leqq \sqrt{r}$

$$|\Re \log f'(z)| < \log Q(\sqrt{r}).$$

Daraus folgt nun für $|z| \leqq r$ wegen $(\log f'(z))_{z=0} = 0$,

$$|\Im \log f'(z)| < \frac{2}{\pi} \log Q(\sqrt{r}) \log \frac{1+\sqrt{r}}{1-\sqrt{r}}$$

L. Bieberbach, „Einführung in die konforme Abbildung", Sammlung Göschen, 1915, § 14; „Über einige Extremalprobleme im Gebiete der konformen Abbildung", Math. Ann., 77 (1916), S. 153–172, insbes. § 3; „Über die Koeffizienten derjenigen Potenzreihen, welche eine schlichte Abbildung des Einheitskreises vermitteln", Sitzungsberichte der Berliner Akademie 1916, S. 940–955; „Aufstellung und Beweis des Drehungssatzes für schlichte konforme Abbildungen", Math. Zeitschrift, 4 (1919), S. 295–305.

Gronwall, „Sur la déformation dans la représentation conforme", Comptes Rendus, 162 (1916), S. 249–252; „Sur la déformation dans la représentation conforme sous des conditions restrictives", Comptes Rendus, 162 (1916), S. 316–318.

E. Study, „Vorlesungen über ausgewählte Gegenstände der Geometrie", Zweites Heft (Leipzig 1913), insbes. § 15.

E. Landau, „Darstellung und Begründung einiger neuerer Ergebnisse der Funktionentheorie", Berlin 1916, insbes. § 27.

G. Faber, „Neuer Beweis eines Koebe-Bieberbachschen Satzes über konforme Abbildung", Münchener Akademieberichte 1916, S. 39–42.

G. Pick, „Über die konforme Abbildung des Kreises auf ein schlichtes und zugleich beschränktes Gebiet", Wiener Sitzungsberichte, Math. Naturw. Klasse, Abt. IIa, 126; „Über den Koebeschen Verzerrungssatz", Leipziger Akademieberichte, 68 (1916), S. 58–64.

R. v. Mises, „Zur Theorie des Tragflächenauftriebes I u. II", Zeitschr. f. Flugtechnik u. Motorluftschiffahrt 1917 u. 1920.

Ph. Frank u. K. Löwner, „Über eine Anwendung des Koebeschen Verzerrungssatzes auf ein Problem der Hydrodynamik", Math. Zeitschrift, 3 (1919), S. 78–86.

K. Löwner, „Über Extremalsätze bei der konformen Abbildung des Äußern des Einheitskreises", Math. Zeitschr., 3 (1919), S. 65–77.

P. J. Mysberg, „Über den Verzerrungssatz in der Theorie der konformen Abbildung", Öfversigt af Finska Vetenscaps-Societatens Förhandlingar, LX (1917–18), Afd. A, Nr. 7.

L. Lichtenstein, „Neuere Entwicklung der Potentialtheorie. Konforme Abbildung" in Encyklopädie der math. Wiss., Artikel IIC3 (1920), insbes. S. 321.

J. Rey Pastor, „Teoría de la representació conforme" (Conferencies 1915). Publicacions de l'Institut de Ciencies, Barcelona. S. insbes. S. 58ff.

uf Grund der Bemerkung, daß die *Beschränktheit des reellen Teiles einer einem Kreise regulären, im Mittelpunkte den Wert Null annehmenden unktion die Beschränktheit ihres imaginären Teiles für jeden kleineren nzentrischen Kreis zur Folge hat*, eine Bemerkung, von der wir hier in estalt derjenigen präzisen Formel Gebrauch gemacht haben, die wir in nserem Artikel „Über das Schwarzsche Lemma usw." (diese Zeitschrift 6 52—84) als Satz II mitgeteilt haben. Damit ist der oben angegebene atz bewiesen.

Die Frage der Bestimmung der genauen Schranke bleibt offen; diese chranke ist auch von Bieberbach allgemein nicht bestimmt worden; och ist Bieberbach auf seinem Wege der Herleitung zu der ihr nahe ommenden Schranke $\log \frac{1+r}{1-r}$ gelangt. Seine Behauptung in der Einleitung, aß der eingangs genannte Satz nicht als eine Folge aus meinem Verzerrungs- atze gewonnen werden könne, muß jedoch nach vorstehendem als unzu- reffend bezeichnet werden.

Eingegangen am 7. Oktober 1919.)

Note on a Theorem of Hilbert.

By

G. H. Hardy.

1. It was proved by Hilbert, in the course of his investigations in the theory of integral equations, that *the series*

$$\sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{a_m a_n}{m+n} \qquad (a_m \geqq 0)$$

is convergent whenever $\sum a_m^2$ *is convergent.* Of this theorem, which is one of the simplest and most beautiful in the theory of double series of positive terms, at least five essentially different proofs have been published. Hilbert's own proof, which depends upon the theory of Fourier's series, is outlined by Weyl in his *Inaugural-Dissertation*[1]. Another proof was given by Wiener[2], and two more by Schur[3]; but none of these proofs is as simple and elementary as might be desired. Thus Schur's first proof depends upon the theory of quadratic and bilinear forms in an infinity of variables; and his second (which is unquestionably the most elegant of all) on a change of variables in a double integral. And Wiener's proof, while genuinely elementary, is distinctly artificial.

To these four proofs I added recently[4] a fifth which seemed to me to lack nothing in simplicity. I observed first that Hilbert's theorem is an immediate corollary of another theorem which seems of some interest in itself. This theorem is as follows:

---

[1]) H. Weyl, „Singuläre Integralgleichungen", Göttingen 1908, p. 83.

[2]) F. W. Wiener, „Elementarer Beweis eines Reihensatzes von Herrn Hilbert", Math. Annalen, **68** (1910), pp. 361—366.

[3]) I. Schur, „Bemerkungen zur Theorie der beschränkten Bilinearformen mit unendlich vielen Veränderlichen", Journal für Math., **140** (1912), pp. 1—28.

[4]) G. H. Hardy, „Notes on some points in the integral calculus (51)", Messenger of Mathematics, **48** (1918), pp. 107—112.

Theorem A. *If* $\sum a_n^2$ *is convergent then*

$$\sum \left(\frac{A_n}{n}\right)^2,$$

here $A_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$, *is convergent.*

In order to deduce Hilbert's theorem from Theorem A, we have ly to observe that the convergence of the two series in question involves at of

$$\sum \frac{a_n A_n}{n},$$

d *a fortiori* of

$$\sum_n a_n \sum_{m=1}^{n} \frac{a_m}{m+n}$$

of

$$\sum_{m \leqq n} \frac{a_m a_n}{m+n}.$$

2. Dr. Marcel Riesz, to whom recently I communicated Theorem A, once found another proof which is equal to my own in simplicity, d which seems to both of us more natural and therefore preferable. is proof naturally suggests an interesting generalisation, viz:

Theorem B. If $\varkappa > 1$ *and* $\sum a_n^\varkappa$ *is convergent, then*

$$\sum \left(\frac{A_n}{n}\right)^\varkappa$$

convergent.

I give the proof of this theorem here: Riesz's proof of Theorem A obtained by writing $\varkappa = 2$ throughout the argument.

Let

$$\Phi_n = n^{-\varkappa} + (n+1)^{-\varkappa} + (n+2)^{-\varkappa} + \ldots.$$

Then

$$\sum_1^N \left(\frac{A_n}{n}\right)^\varkappa = \sum_1^N A_n^\varkappa (\Phi_n - \Phi_{n+1}) = \sum_1^N (A_n^\varkappa - A_{n-1}^\varkappa)\Phi_n - A_N^\varkappa \Phi_{N+1}\ ^{5})$$

$$\leqq \sum_1^N (A_n^\varkappa - A_{n-1}^\varkappa)\Phi_n \leqq \varkappa \sum_1^N a_n A_n^{\varkappa-1} \Phi_n.$$

But

$$\Phi_n < n^{-\varkappa} + \int_n^\infty x^{-\varkappa}\, dx = n^{-\varkappa} + \frac{n^{-(\varkappa-1)}}{\varkappa - 1} \leqq \frac{\varkappa}{\varkappa - 1} n^{-(\varkappa-1)};$$

[5]) $A_0 = 0$.

and therefore

$$\sum_1^N \left(\frac{A_n}{n}\right)^x \leqq \frac{x^2}{x-1}\sum_1^N a_n\left(\frac{A_n}{n}\right)^{x-1} \leqq \frac{x^2}{x-1}\left(\sum_1^N a_n^x\right)^{\frac{1}{x}}\left\{\sum_1^N\left(\frac{A_n}{n}\right)^x\right\}^{\frac{x-1}{x}}\ ^6)$$

Hence

$$\sum_1^N \left(\frac{A_n}{n}\right)^x \leqq \left(\frac{x^2}{x-1}\right)^x \sum_1^N a_n^x; \tag{2}$$

which proves the theorem.

3. It would be interesting to know what is the best constant which can appear on the right hand side of (2). It is certain that the actual constant is unnecessarily large. For

$$\begin{aligned} \Phi_n &= n^{-x} + (n+1)^{-x} + \ldots + (2n)^{-x} + \ldots + (3n)^{-x} + \ldots \\ &< n\{n^{-x} + (2n)^{-x} + (3n)^{-x} + \ldots\} = n^{-(x-1)}\zeta(x)\ ^7). \end{aligned} \tag{3}$$

If we use (3) instead of (1), we are led to an inequality in which the constant $\left(\frac{x^2}{x-1}\right)^x$ is replaced by the smaller constant

$$\{x\zeta(x)\}^x.$$

The corresponding inequality for integrals is

$$\int_a^\infty \left(\frac{F}{x}\right)^x dx \leqq \left(\frac{x}{x-1}\right)^x \int_a^\infty f^x dx. \tag{4}$$

---

[6]) By the well known inequality

$$\sum ab \leqq \left(\sum a^x\right)^{\frac{1}{x}}\left(\sum b^{\frac{x}{x-1}}\right)^{\frac{x-1}{x}},$$

which seems to be due to Hölder: see E. Landau, „Über einen Konvergenzsatz", Göttinger Nachrichten, 1907, pp. 25—27.

[7]) I have taken this simple argument from a letter of Prof. Schur, my own proof of the inequality having been unnecessarily complicated. Prof. Schur also points out to me that, when $x = 2$, the constant $\left(\frac{x^2}{x-1}\right)^x = 16$ in (2) can certainly be replaced by $\left(\frac{x}{x-1}\right)^x = 4$; and that this is an almost immediate deduction from the inequality

$$\sum_1^N \left(1 - \frac{2}{n+1}\right)\left(\frac{A_n}{n}\right)^2 \leqq 4\sum_1^N a_n^2,$$

proved in my note in the Messenger of Mathematics.

Prof. Schurs letter contains a number of other interesting developments, which I hope may be made public before long.

Here

$$F = \int_a^x f\,dt,$$

nd a and f are positive. It will be observed that in this inequality we ave a smaller constant than in (1), and it is easy to show, by taking $= x^{-\frac{1}{\kappa}-\varepsilon}$, where ε is small, that the constant is in fact the correct ne. I can show that, in (2), the constant cannot be replaced by any naller constant than that which occurs in (4); but whether this constant ill suffice I cannot say.

4. Theorems of this character naturally suggest numerous generalisa-ons. I content myself with mentioning the following theorem, which ay be proved by a slight modification of the proof of Theorem B.

Theorem C. *If* $\kappa > 1$, λ_n *and* a_n *are positive, and* $\sum \lambda_n a_n^\kappa$ *is con-rgent, then*

$$\sum \lambda_n \left(\frac{\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_n a_n}{\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n} \right)^\kappa$$

convergent.

Trinity College, Cambridge, 25 October 1919.

(Eingegangen am 30. Oktober 1919.)

Bemerkung zu der Arbeit „Über eine spezielle Klasse von Regelflächen“[1]).

Von

Oskar Perron in Heidelberg.

Auf Seite 233 habe ich den Satz, daß durch jede allgemeine Schraubenlinie ∞^1 abwickelbare Flächen gehen, deren Geraden gegen das begleitende Dreikant der Schraubenlinie konstante Lage haben, Herrn Voß zugeschrieben. Inzwischen habe ich der Hallenser Dissertation von Frieda Nugel, „Die Schraubenlinien, eine monographische Darstellung“ (Halle 1912) entnommen, daß der Satz schon 1879 von P. Appell angegeben wurde (Sur une propriété caractéristique des hélices, Archiv der Mathematik und Physik, **64** (1879) S. 19—23). Auch die Tatsache, daß diese ∞^1 abwickelbaren Flächen lauter Böschungsflächen sind, ist Appell bekannt.

[1]) Diese Zeitschrift **4** (1919) S. 231—270.

(Eingegangen am 11. Februar 1920.)

Mathematisch-physische Preisaufgaben

der

Fürstlich Jablonowskischen Gesellschaft.

1. Die Gesellschaft wünscht

eine Übersicht der Leptonenkunde hinsichtlich ihrer Anwendung auf kristalline Materie und eine experimentelle Fortführung der einschlägigen Forschung mittels Röntgenstrahlen auf mineralogisch bedeutsame Stoffe.

Einlieferung bis zum 31. Oktober 1920; Preis 1500 Mark.

2. Die Additionstheoreme für die drei elliptischen Funktionen sin am u, s am u, Δ am u weisen auf eine Verallgemeinerung für ein System on vier oder mehr Funktionen hin. Man könnte für $\nu = 1, 2, 3, \ldots, n$

) $\varphi_\nu(u+v) = R_\nu(\varphi_1(u), \varphi_1(v), \varphi_2(u), \varphi_2(v), \ldots, \varphi_n(u), \varphi_n(v))$

tzen und dabei $R_1, R_2, \ldots, R_n$ als rationale Funktionen annehmen. iese rationalen Funktionen hätten dann vermutlich nur den Bedingungen genügen, daß die beiden für $\varphi_\nu(u+v)$ und für $\varphi_\nu(v+u)$ unmittelbar nd ebenso die beiden für $\varphi_\nu((u+v)+w)$ und für $\varphi_\nu(u+(v+w))$ mittelr aus (1) sich ergebenden Ausdrücke übereinstimmend ausfallen.

Die Gleichungen (1) lassen sich unter analogen Bedingungen noch eiter so verallgemeinern, daß man die $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ als Funktionen on mehreren Argumenten voraussetzt; auch kann man nach Art der eierstraßschen Behandlung der Additionstheoreme in die rechten iten der Gleichungen die Ableitungen der Funktionen $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ mit ngehen lassen.

Alle die angedeuteten Ansätze sind von dem Standpunkt aus zu verlgen, daß die rationalen Funktionen $R_1, R_2, \ldots, R_n$ zuerst den Bedinngen gemäß gewählt und nachher die Funktionen $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ mit ilfe der Additionstheoreme definiert werden. Es soll versucht werden, rch tatsächliche spezielle Wahl von n und von $R_1, R_2, \ldots, R_n$ einen ementaren Zugang zu einem speziellen Kapitel der Theorie der Abelhen Funktionen zu gewinnen.

Einlieferung bis zum 31. Oktober 1921; Preis 1500 Mark.

3. Seit der Aufstellung der umfassenden Theorie der Himmelshelligkeit durch Chr. Wiener ist keine weitere in gleichem Maße tiefdringende theoretische Arbeit auf diesem Gebiete erschienen. Eine solche hätte auch wenig Zweck gehabt, solange nicht umfassendere Beobachtungen der Himmelshelligkeit vorlagen. Dies ist jetzt anders geworden. In dem reichen Beobachtungsstoff von Dorno in Davos, von Uibe in Teneriffa u. a. sind neue Grundlagen der Beobachtung geschaffen worden. Insbesondere hat sich herausgestellt, daß in größeren Höhen das Verhalten des Himmels sich dem Rayleighschen Himmel annähert, ohne ihn freilich bei weitem zu erreichen, d. h. einen Himmel, bei dem nur zerstreuende Teilchen in Frage kommen, deren Abmessungen klein sind gegenüber der Wellenlänge des Lichtes.

Die Gesellschaft wünscht daher

eine theoretische Ableitung des Rayleighschen Himmels, wobei auch die Auslöschung der Strahlen, die gegenseitige Widerspiegelung des Himmels und der Erde zu berücksichtigen sind. Darüber hinaus ist auch die Berechnung der Himmelshelligkeit in der Nähe der Sonne unter dem Einfluß der Beugung durch gröbere Teilchen erwünscht, ferner die Bestimmung des Einflusses dieser Helligkeit auf den übrigen Himmel und soweit möglich ist, ein Vergleich der in dieser Weise vereinfachten Theorie der Himmelshelligkeit mit der Erfahrung.

Einlieferung bis zum 31. Oktober 1922; Preis 2000 Mark.